Einige Eigenschaften der Potenzgeraden

Darij Grinberg

Version: 3. September 2007

1. Vorbemerkungen

In dieser Notiz werden wir einige Aspekte des Konzeptes der Potenzgeraden zweier Kreise neu beleuchten (zumindest neu im Sinne von "nicht allgemein bekannt"; ob die folgenden Resultate wirklich nie zuvor entdeckt wurden, läßt sich sehr schwer feststellen). Für eine recht vollständige Darstellung der Theorie der Potenzgeraden sei auf [1], Kapitel VIII verwiesen; im Folgenden werden wir nur einen Teil dieser Theorie anreißen.

Zuerst vereinbaren wir einige Konventionen und Notationen:

- Wir arbeiten in der Ebene. Das heißt: Die geometrischen Objekte, die wir im Folgenden definieren werden, werden alle in einer Ebene liegen.

- Wir verwenden orientierte Strecken, wobei wir die orientierte Streckenlänge einer Strecke AB mit $\overline{AB}$ bezeichnen, und die nicht-orientierte (also gewöhnliche) Streckenlänge dieser Strecke einfach mit AB.

- Für jeden Punkt A und jede nichtnegative reelle Zahl x bezeichnen wir mit $A(x)$ den Kreis mit Zentrum A und Radius x. [1]

- Für jeden Kreis k und jeden Punkt P definieren wir die *Potenz des Punktes P in bezug auf den Kreis k* als die Zahl $PM^2 - r^2$, wobei M das Zentrum und r der Radius des Kreises k sind. Diese Potenz $PM^2 - r^2$ werden wir auch mit $\operatorname{pot}(P;\ k)$ bezeichnen; es ist also $\operatorname{pot}(P;\ k) = PM^2 - r^2$.
  Mit anderen Worten: Ist M ein Punkt, und r eine Zahl, dann ist $\operatorname{pot}(P;\ M(r)) = PM^2 - r^2$.

- Bekanntlich (siehe etwa [1], §421) gilt:
  Sind k und m zwei Kreise mit verschiedenen Zentren, dann ist die Menge aller Punkte P, für die $\operatorname{pot}(P;\ k) = \operatorname{pot}(P;\ m)$ gilt, eine Gerade.
  Diese Gerade heißt die *Potenzgerade der Kreise k und m*, und wird im Folgenden mit $\operatorname{rad}(k;\ m)$ bezeichnet.
  Bekanntlich steht die Potenzgerade zweier Kreise stets senkrecht auf der Verbindungsgeraden ihrer Zentren. Das heißt: Sind K und M zwei Punkte, und r und s zwei Zahlen, dann ist
  $$\operatorname{rad}(K(r);\ M(s)) \perp KM. \tag{1}$$

- Seien g eine Gerade und P ein Punkt. Dann bezeichnen wir mit $\operatorname{perp}(P;\ g)$ die Senkrechte zur Geraden g durch den Punkt P.

2. Ein Satz von Casey

[1] Dieser Kreis ist auch im Falle von $x = 0$ definiert. Man könnte auch negative oder gar rein imaginäre Werte von x zulassen, wenn man sich von der üblichen Vorstellung eines Kreises als Punktmenge verabschiedet und stattdessen einen "abstrakten Kreis" als geordnetes Paar aus einem Punkt (dem Zentrum) und einer Zahl (dem Radius) definiert, wobei das Quadrat des Radius reell sein soll. Alle Resultate in dieser Arbeit gelten auch für solche "abstrakten Kreise".

Nun können wir loslegen, und zwar mit einem sehr einfachen Resultat ([1], §471):

Satz 1, der Potenzsatz von Casey: Seien A und B zwei verschiedene Punkte, und seien x und y zwei Zahlen. Sei P ein Punkt, und sei Q der Fußpunkt des Lotes von dem Punkt P auf die Gerade $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y))$.

Die zwei Geraden PQ und AB sind parallel. Wenn wir diese zwei Geraden gleich richten (also mit der gleichen Richtung versehen[2]), dann gilt

$$\operatorname{pot}(P;\ A(x)) - \operatorname{pot}(P;\ B(y)) = 2 \cdot \overline{QP} \cdot \overline{AB}. \tag{2}$$

(Siehe Fig. 1.)

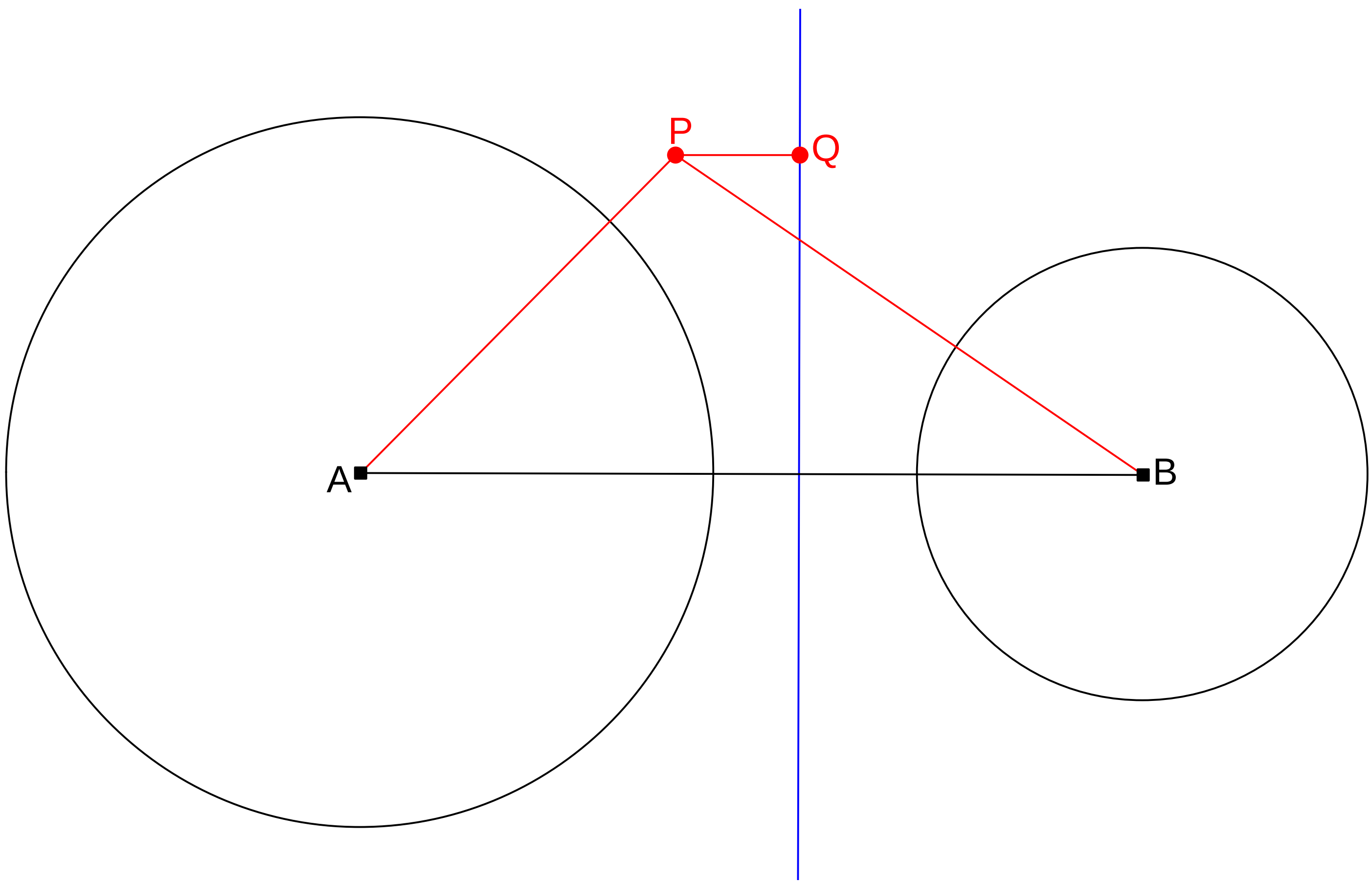

Fig. 1

Beweis von Satz 1: (Siehe Fig. 2.) Erstmal ist zu zeigen, daß die Geraden PQ und AB parallel sind. In der Tat folgt aus (1) die Relation $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y)) \perp AB$, während andererseits $PQ \perp \operatorname{rad}(A(x);\ B(y))$ ist (nach der Konstruktion des Punktes Q als Lotfußpunkt). Daraus folgt $PQ \parallel AB$. Wir haben also gezeigt, daß die Geraden PQ und AB parallel sind.

Es bleibt nun die Gleichung (2) zu beweisen - unter der Annahme, daß die Geraden PQ und AB gleich gerichtet sind.

Sei P' der Fußpunkt des Lotes von dem Punkt P auf die Gerade AB. Sei $Q' = \operatorname{rad}(A(x);\ B(y)) \cap AB$. Aus $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y)) \perp AB$ folgt $\measuredangle P'Q'Q = 90^\circ$. Ferner ist $\measuredangle PP'Q' = 90^\circ$ und $\measuredangle PQQ' = 90^\circ$ (nach der Konstruktion der Punkte P' und

[2] Dies ist möglich, da die Geraden PQ und AB parallel sind.

Q als Lotfußpunkte). Somit hat das Viereck $PQQ'P'$ drei rechte Winkel; es ist also ein Rechteck. Daher ist $Q'P' = QP$. Also haben die gerichteten Strecken $\overline{Q'P'}$ und $\overline{QP}$ den gleichen Betrag. Andererseits haben diese gerichteten Strecken aber auch das gleiche Vorzeichen (da wir die Geraden PQ und AB gleich gerichtet haben). Somit ist $\overline{Q'P'} = \overline{QP}$.

Aus $Q' \in \operatorname{rad}(A(x);\ B(y))$ folgt $\operatorname{pot}(Q';\ A(x)) = \operatorname{pot}(Q';\ B(y))$. Also ist

$$\overline{Q'A}^2 - x^2 = Q'A^2 - x^2 = \operatorname{pot}(Q';\ A(x)) = \operatorname{pot}(Q';\ B(y)) = Q'B^2 - y^2 = \overline{Q'B}^2 - y^2.$$

Daher ist

$$\overline{Q'A}^2 - \overline{Q'B}^2 = x^2 - y^2. \tag{3}$$

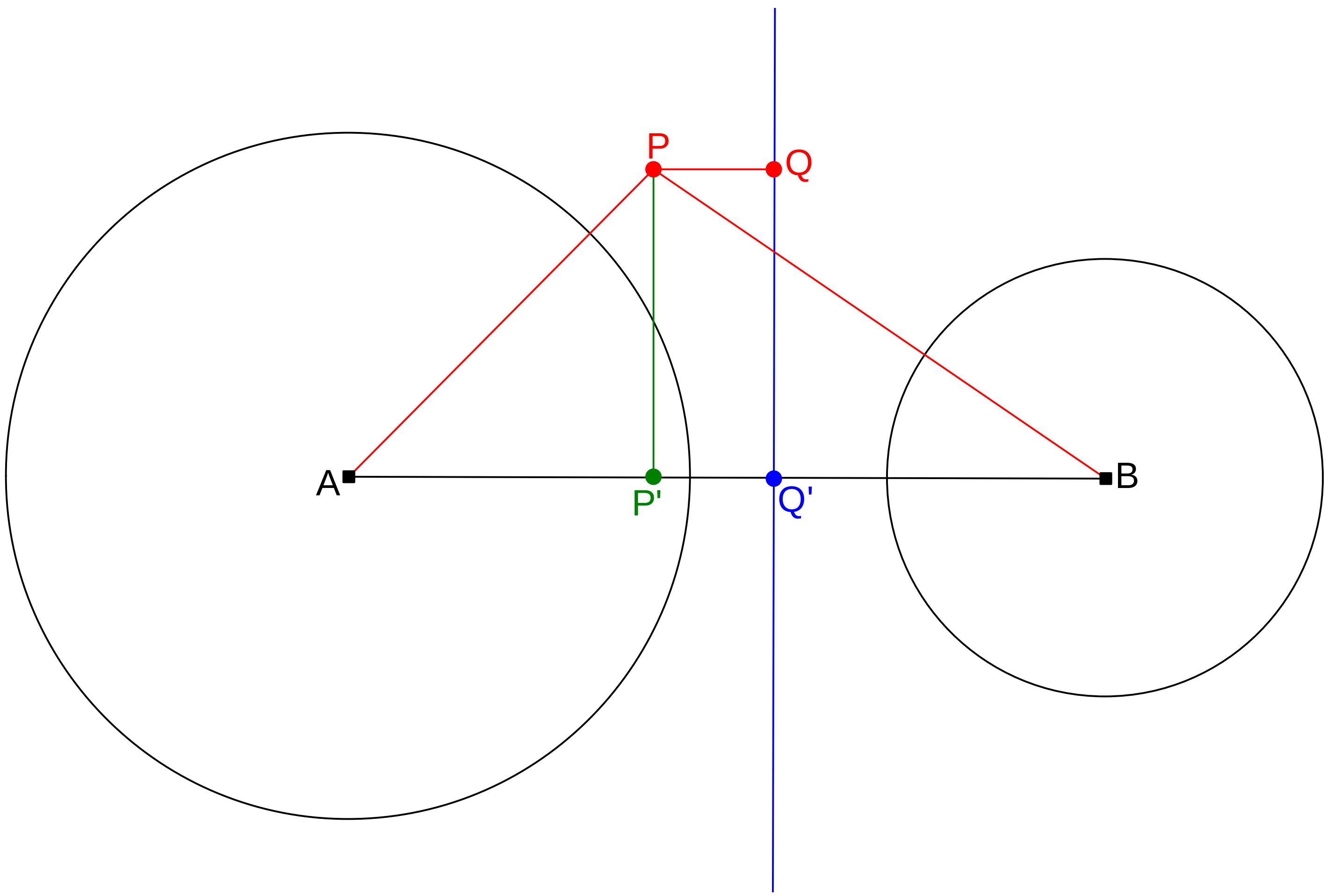

Fig. 2

Wegen $PP' \perp AB$ ist $\measuredangle AP'P = 90^\circ$. Das heißt, das Dreieck $AP'P$ ist bei P' rechtwinklig. Nach dem Satz von Pythagoras ist also $PA^2 = P'P^2 + P'A^2$. Also ist

$$\operatorname{pot}(P;\ A(x)) = PA^2 - x^2 = \left(P'P^2 + P'A^2\right) - x^2 = \left(P'P^2 + \overline{P'A}^2\right) - x^2.$$

Analog ist $\operatorname{pot}(P;\ B(y)) = \left(P'P^2 + \overline{P'B}^2\right) - y^2$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\operatorname{pot}(P;\ A(x)) - \operatorname{pot}(P;\ B(y)) \\
&= \left(\left(P'P^2 + \overline{P'A}^2\right) - x^2\right) - \left(\left(P'P^2 + \overline{P'B}^2\right) - y^2\right) = \left(\overline{P'A}^2 - \overline{P'B}^2\right) - \left(x^2 - y^2\right) \\
&= \left(\overline{P'A}^2 - \overline{P'B}^2\right) - \left(\overline{Q'A}^2 - \overline{Q'B}^2\right) \qquad \left(\text{denn } x^2 - y^2 = \overline{Q'A}^2 - \overline{Q'B}^2 \text{ nach (3)}\right) \\
&= \left(\overline{P'A} + \overline{P'B}\right) \cdot \left(\overline{P'A} - \overline{P'B}\right) - \left(\overline{Q'A} + \overline{Q'B}\right) \cdot \left(\overline{Q'A} - \overline{Q'B}\right) \\
&= \left(\overline{P'A} + \overline{P'B}\right) \cdot \overline{BA} - \left(\overline{Q'A} + \overline{Q'B}\right) \cdot \overline{BA} \\
&= \left(\left(\overline{P'A} + \overline{P'B}\right) - \left(\overline{Q'A} + \overline{Q'B}\right)\right) \cdot \overline{BA} \\
&= \left(\left(\overline{P'A} - \overline{Q'A}\right) + \left(\overline{P'B} - \overline{Q'B}\right)\right) \cdot \overline{BA} = \left(\overline{P'Q'} + \overline{P'Q'}\right) \cdot \overline{BA} \\
&= 2 \cdot \overline{P'Q'} \cdot \overline{BA} = 2 \cdot \left(-\overline{Q'P'}\right) \cdot \left(-\overline{AB}\right) = 2 \cdot \overline{Q'P'} \cdot \overline{AB} = 2 \cdot \overline{QP} \cdot \overline{AB}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Gleichung (2) bewiesen, und der Beweis von Satz 1 ist komplett.

3. Drei Kreise mit kollinearen Zentren

Das Kernstück dieser Notiz ist folgender Satz (Fig. 3):

Satz 2: Sei g eine Gerade, und seien A, B und C drei paarweise verschiedene Punkte auf der Geraden g. Seien x, y und z drei Zahlen. Seien

$$X = \operatorname{rad}(B(y);\ C(z)) \cap g; \qquad Y = \operatorname{rad}(C(z);\ A(x)) \cap g; \qquad Z = \operatorname{rad}(A(x);\ B(y)) \cap g.$$

Sei die Gerade g beliebig gerichtet. Dann gilt:

a) Es ist

$$\overline{YZ} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{y^2}{\overline{BC} \cdot \overline{BA}} + \frac{z^2}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} - 1\right) \cdot \overline{BC}. \qquad (4)$$

b) Es ist

$$\frac{\overline{YZ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ZX}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{AB}}.$$

Beweis von Satz 2: Nach (1) ist $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y)) \perp AB$, also $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y)) \perp g$. Mit anderen Worten: $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y)) \perp AZ$. Andererseits ist $Z \in \operatorname{rad}(A(x);\ B(y))$.

Somit ist der Punkt Z der Fußpunkt des Lotes von dem Punkt A auf die Gerade $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y))$. Nach der Formel (2) von Satz 1 gilt somit $\operatorname{pot}(A;\ A(x)) - \operatorname{pot}(A;\ B(y)) = 2 \cdot \overline{ZA} \cdot \overline{AB}$. Also ist

$$\begin{aligned}
\overline{ZA} &= \frac{\operatorname{pot}(A;\ A(x)) - \operatorname{pot}(A;\ B(y))}{2 \cdot \overline{AB}} = \frac{\left(AA^2 - x^2\right) - \left(AB^2 - y^2\right)}{2 \cdot \overline{AB}} \\
&= \frac{\left(0^2 - x^2\right) - \left(\overline{AB}^2 - y^2\right)}{2 \cdot \overline{AB}} = \frac{y^2 - x^2 - \overline{AB}^2}{2 \cdot \overline{AB}}.
\end{aligned}$$

Analog ist

$$\overline{YA} = \frac{z^2 - x^2 - \overline{AC}^2}{2 \cdot \overline{AC}}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\overline{YZ} = \overline{YA} - \overline{ZA} &= \frac{z^2 - x^2 - \overline{AC}^2}{2 \cdot \overline{AC}} - \frac{y^2 - x^2 - \overline{AB}^2}{2 \cdot \overline{AB}} \\
&= \frac{\left(z^2 - x^2 - \overline{AC}^2\right) \cdot \overline{AB} - \left(y^2 - x^2 - \overline{AB}^2\right) \cdot \overline{AC}}{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}} \\
&= \frac{\left(z^2 \cdot \overline{AB} - x^2 \cdot \overline{AB} - \overline{AC}^2 \cdot \overline{AB}\right) - \left(y^2 \cdot \overline{AC} - x^2 \cdot \overline{AC} - \overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}\right)}{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}} \\
&= \frac{\left(x^2 \cdot \overline{AC} - x^2 \cdot \overline{AB}\right) - y^2 \cdot \overline{AC} + z^2 \cdot \overline{AB} - \left(\overline{AC}^2 \cdot \overline{AB} - \overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}\right)}{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}} \\
&= \frac{x^2 \cdot \left(\overline{AC} - \overline{AB}\right) - y^2 \cdot \overline{AC} + z^2 \cdot \overline{AB} - \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \left(\overline{AC} - \overline{AB}\right)}{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}} \\
&= \frac{x^2 \cdot \overline{BC} - y^2 \cdot \overline{AC} + z^2 \cdot \overline{AB} - \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 \cdot \overline{BC} - y^2 \cdot \overline{AC} + z^2 \cdot \overline{AB} - \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}} \cdot \overline{BC} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} - \frac{y^2}{\overline{BC} \cdot \overline{AB}} + \frac{z^2}{\overline{AC} \cdot \overline{BC}} - 1\right) \cdot \overline{BC} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} - \frac{y^2}{\overline{BC} \cdot \left(-\overline{BA}\right)} + \frac{z^2}{\left(-\overline{CA}\right) \cdot \left(-\overline{CB}\right)} - 1\right) \cdot \overline{BC} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{y^2}{\overline{BC} \cdot \overline{BA}} + \frac{z^2}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} - 1\right) \cdot \overline{BC}.
\end{aligned}$$

Damit ist Satz 2 **a)** bewiesen.

Wir geben zwei Beweise von Satz 2 **b)**:

Erster Beweis von Satz 2 ***b)****:* Nachdem wir Satz 2 **a)** bereits nachgewiesen haben, können wir ihn jetzt benutzen: Aus (4) folgt

$$\frac{\overline{YZ}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{y^2}{\overline{BC} \cdot \overline{BA}} + \frac{z^2}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} - 1\right).$$

Analog ist

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{ZX}}{\overline{CA}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{y^2}{\overline{BC} \cdot \overline{BA}} + \frac{z^2}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} - 1\right); \\
\frac{\overline{XY}}{\overline{AB}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{y^2}{\overline{BC} \cdot \overline{BA}} + \frac{z^2}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} - 1\right).
\end{aligned}$$

Also ist $\dfrac{\overline{YZ}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{ZX}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{XY}}{\overline{AB}}$. Damit ist Satz 2 **b)** gezeigt.

Zweiter Beweis von Satz 2 ***b)****:* Nach (1) ist $\operatorname{rad}\left(A\left(x\right);\ B\left(y\right)\right) \perp AB$, also $\operatorname{rad}\left(A\left(x\right);\ B\left(y\right)\right) \perp g$. Mit anderen Worten: $\operatorname{rad}\left(A\left(x\right);\ B\left(y\right)\right) \perp YZ$. Andererseits ist $Z \in \operatorname{rad}\left(A\left(x\right);\ B\left(y\right)\right)$.

Somit ist der Punkt Z der Fußpunkt des Lotes von dem Punkt Y auf die Gerade $\operatorname{rad}\left(A\left(x\right);\ B\left(y\right)\right)$. Nach der Formel (2) von Satz 1 gilt somit $\operatorname{pot}\left(Y;\ A\left(x\right)\right) -$

$\operatorname{pot}(Y;\ B(y)) = 2 \cdot \overline{ZY} \cdot \overline{AB}$. Analog ist $\operatorname{pot}(Y;\ C(z)) - \operatorname{pot}(Y;\ B(y)) = 2 \cdot \overline{XY} \cdot \overline{CB}$. Doch aus $Y \in \operatorname{rad}(C(z);\ A(x))$ folgt $\operatorname{pot}(Y;\ C(z)) = \operatorname{pot}(Y;\ A(x))$. Somit ist

$$2 \cdot \overline{XY} \cdot \overline{CB} = \operatorname{pot}(Y;\ C(z)) - \operatorname{pot}(Y;\ B(y)) = \operatorname{pot}(Y;\ A(x)) - \operatorname{pot}(Y;\ B(y)) = 2 \cdot \overline{ZY} \cdot \overline{AB},$$

also $\overline{XY} \cdot \overline{CB} = \overline{ZY} \cdot \overline{AB}$. Daher ist

$$\overline{XY} \cdot \overline{BC} = \overline{XY} \cdot \left(-\overline{CB}\right) = -\overline{XY} \cdot \overline{CB} = -\overline{ZY} \cdot \overline{AB} = \left(-\overline{ZY}\right) \cdot \overline{AB} = \overline{YZ} \cdot \overline{AB},$$

also $\dfrac{\overline{XY}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{YZ}}{\overline{BC}}$. Analog ist $\dfrac{\overline{YZ}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{ZX}}{\overline{CA}}$. Daher ist $\dfrac{\overline{YZ}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{ZX}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{XY}}{\overline{AB}}$, und somit ist Satz 2 **b)** erneut gezeigt.

Nachdem jetzt beide Sätze 2 **a)** und 2 **b)** bewiesen sind, ist der Beweis von Satz 2 abgeschlossen.

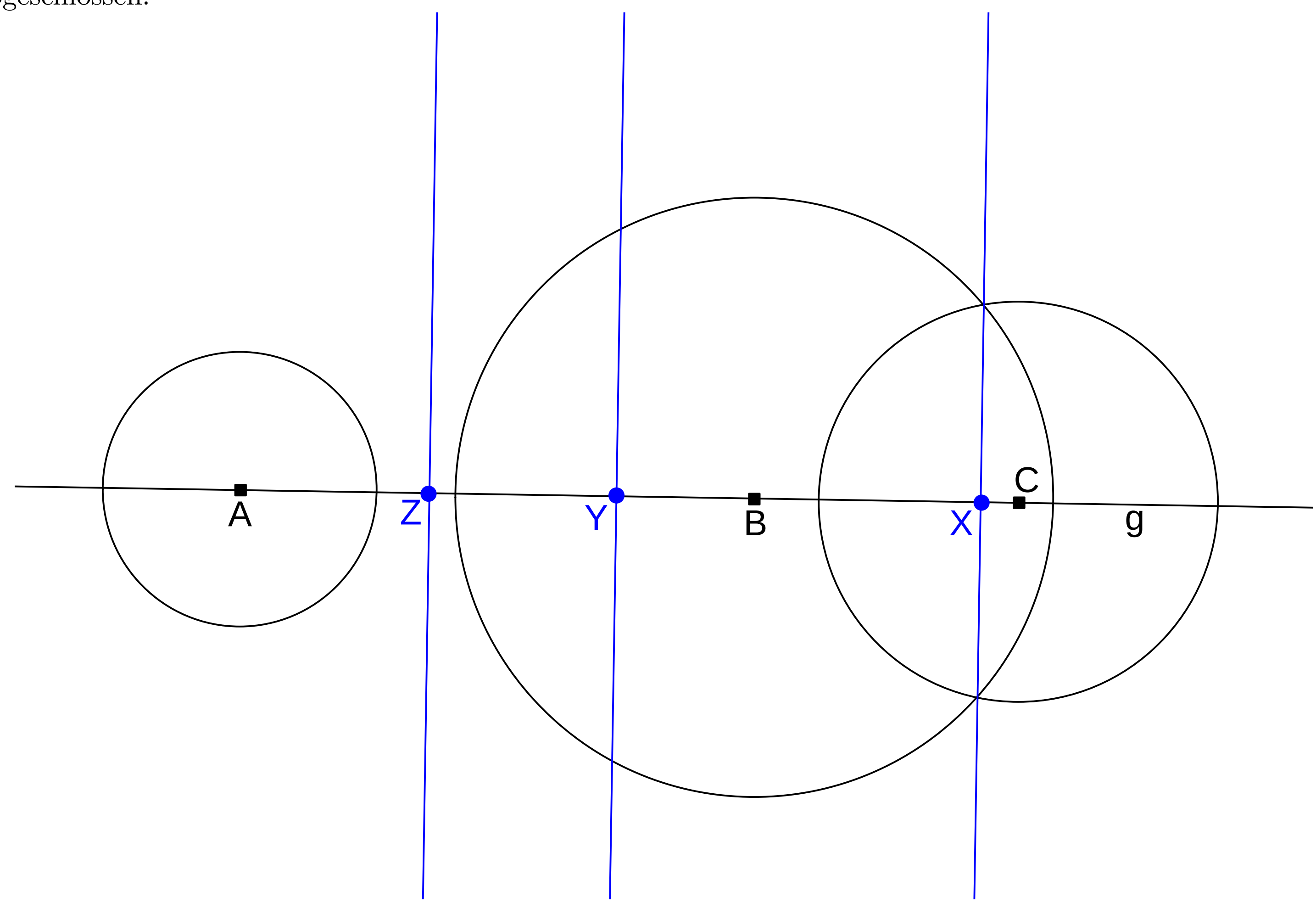

Fig. 3

4. Koaxiale Kreise

Drei Kreise k, m und n (mit paarweise verschiedenen Zentren) heißen *koaxial*, wenn $\operatorname{rad}(m;\ n) = \operatorname{rad}(n;\ k) = \operatorname{rad}(k;\ m)$ ist (also wenn die drei paarweisen Potenzgeraden dieser drei Kreise zusammenfallen).

Man kann leicht beweisen, daß drei Kreise k, m und n bereits dann koaxial sind, wenn mindestens zwei der Geraden $\operatorname{rad}(m;\ n)$, $\operatorname{rad}(n;\ k)$ und $\operatorname{rad}(k;\ m)$ zusammenfallen. Als Konsequenz von Satz 2 **a)** erhalten wir ein tiefsinnigeres Kriterium für die Koaxialität dreier Kreise:

Satz 3: Seien A, B und C drei paarweise verschiedene Punkte. Seien x, y und z drei Zahlen. Dann sind folgende zwei Aussagen $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ äquivalent:

Aussage $\mathcal{A}_1$*:* Die Kreise $A(x)$, $B(y)$ und $C(z)$ sind koaxial.

Aussage $\mathcal{A}_2$*:* Die Punkte A, B und C liegen auf einer Geraden, und wenn man diese Gerade richtet[3], dann gilt die Gleichung $\frac{x^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\frac{y^2}{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}+\frac{z^2}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}=1$.

Beweis von Satz 3: Zum Beweis von Satz 3 müssen wir zeigen, daß aus der Aussage $\mathcal{A}_1$ die Aussage $\mathcal{A}_2$ folgt, und daß aus der Aussage $\mathcal{A}_2$ die Aussage $\mathcal{A}_1$ folgt.

Zuerst beweisen wir, daß aus der Aussage $\mathcal{A}_1$ die Aussage $\mathcal{A}_2$ folgt:

Angenommen, die Aussage $\mathcal{A}_1$ ist gültig. Dann sind die Kreise $A(x)$, $B(y)$ und $C(z)$ koaxial. Also ist $\operatorname{rad}(B(y);\ C(z)) = \operatorname{rad}(C(z);\ A(x)) = \operatorname{rad}(A(x);\ B(y))$. Nach (1) ist aber $\operatorname{rad}(B(y);\ C(z)) \perp BC$ und $\operatorname{rad}(C(z);\ A(x)) \perp CA$.

Wegen $\operatorname{rad}(B(y);\ C(z)) = \operatorname{rad}(C(z);\ A(x))$ wird $\operatorname{rad}(B(y);\ C(z)) \perp BC$ zu $\operatorname{rad}(C(z);\ A(x)) \perp BC$. Zusammen mit $\operatorname{rad}(C(z);\ A(x)) \perp CA$ ergibt dies $BC \parallel CA$. Da aber die Geraden BC und CA einen gemeinsamen Punkt haben (nämlich den Punkt C), können sie nur parallel sein, wenn sie übereinstimmen. Aus $BC \parallel CA$ folgt also, daß die Geraden BC und CA übereinstimmen. Daher liegen die Punkte A, B und C auf einer Geraden. Bezeichnen wir diese Gerade mit g und richten wir sie, dann gilt laut Satz 2 **a)** die Gleichung

$$\overline{YZ}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\frac{y^2}{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}+\frac{z^2}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}-1\right)\cdot\overline{BC}, \tag{5}$$

wobei $Y = \operatorname{rad}(C(z);\ A(x))\cap g$ und $Z = \operatorname{rad}(A(x);\ B(y))\cap g$ ist. Aus $\operatorname{rad}(C(z);\ A(x)) = \operatorname{rad}(A(x);\ B(y))$ folgt aber $\operatorname{rad}(C(z);\ A(x))\cap g = \operatorname{rad}(A(x);\ B(y))\cap g$, also $Y = Z$, und damit $\overline{YZ} = 0$. Somit wird die Gleichung (5) zu

$$0=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\frac{y^2}{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}+\frac{z^2}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}-1\right)\cdot\overline{BC}.$$

Da $\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\neq 0$ ist (denn $\overline{BC}\neq 0$, weil die Punkte B und C verschieden sind), können wir diese Gleichung durch $\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}$ dividieren, und erhalten

$$0=\frac{x^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\frac{y^2}{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}+\frac{z^2}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}-1,$$

also $\frac{x^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\frac{y^2}{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}+\frac{z^2}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}=1$.

Insgesamt stellen wir fest: Die Punkte A, B und C liegen auf einer Geraden, und wenn man diese Gerade richtet, dann gilt $\frac{x^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\frac{y^2}{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}+\frac{z^2}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}=1$. Also ist Aussage $\mathcal{A}_2$ erfüllt.

[3] Dabei ist es unwesentlich, welche der beiden möglichen Richtungen man für diese Gerade auswählt, denn die Werte der Produkte $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$, $\overline{BC}\cdot\overline{BA}$ und $\overline{CA}\cdot\overline{CB}$ sind unabhängig von der Richtung der Geraden.

Hiermit ist gezeigt, daß aus der Aussage $\mathcal{A}_1$ die Aussage $\mathcal{A}_2$ folgt. Jetzt müssen wir nur noch beweisen, daß aus der Aussage $\mathcal{A}_2$ die Aussage $\mathcal{A}_1$ folgt. Dies beweisen wir folgendermaßen:

Wir nehmen an, die Aussage $\mathcal{A}_2$ gilt. Das heißt, die Punkte A, B und C liegen auf einer Geraden, und es gilt $\frac{x^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\frac{y^2}{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}+\frac{z^2}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}=1$, wobei die Gerade durch die Punkte A, B und C gerichtet ist.

Sei g die Gerade durch die Punkte A, B und C. Laut Satz 2 **a)** gilt dann

$$\overline{YZ}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\frac{y^2}{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}+\frac{z^2}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}-1\right)\cdot\overline{BC},$$

wobei $Y=\operatorname{rad}(C(z);\ A(x))\cap g$ und $Z=\operatorname{rad}(A(x);\ B(y))\cap g$ ist. Wegen $\frac{x^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\frac{y^2}{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}+\frac{z^2}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}=1$ vereinfacht sich diese Gleichung zu $\overline{YZ}=\frac{1}{2}(1-1)\cdot\overline{BC}$, also zu $\overline{YZ}=0$. Daher ist $Y=Z$, also $\operatorname{perp}(Y;\ g)=\operatorname{perp}(Z;\ g)$.

Nun ist $\operatorname{rad}(C(z);\ A(x))\perp g$ (dies ist nur eine Umschreibung von $\operatorname{rad}(C(z);\ A(x))\perp CA$, was aus (1) folgt) und $Y\in\operatorname{rad}(C(z);\ A(x))$. Daher ist $\operatorname{rad}(C(z);\ A(x))=\operatorname{perp}(Y;\ g)$. Analog ist $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y))=\operatorname{perp}(Z;\ g)$. Aus $\operatorname{perp}(Y;\ g)=\operatorname{perp}(Z;\ g)$ folgt also $\operatorname{rad}(C(z);\ A(x))=\operatorname{rad}(A(x);\ B(y))$. Analog ist $\operatorname{rad}(B(y);\ C(z))=\operatorname{rad}(C(z);\ A(x))$, und somit ist $\operatorname{rad}(B(y);\ C(z))=\operatorname{rad}(C(z);\ A(x))=\operatorname{rad}(A(x);\ B(y))$. Also sind die Kreise $A(x)$, $B(y)$ und $C(z)$ koaxial; das heißt, die Aussage $\mathcal{A}_1$ ist erfüllt. Damit ist bewiesen, daß aus der Aussage $\mathcal{A}_2$ die Aussage $\mathcal{A}_1$ folgt. Dadurch ist der Beweis von Satz 3 abgeschlossen.

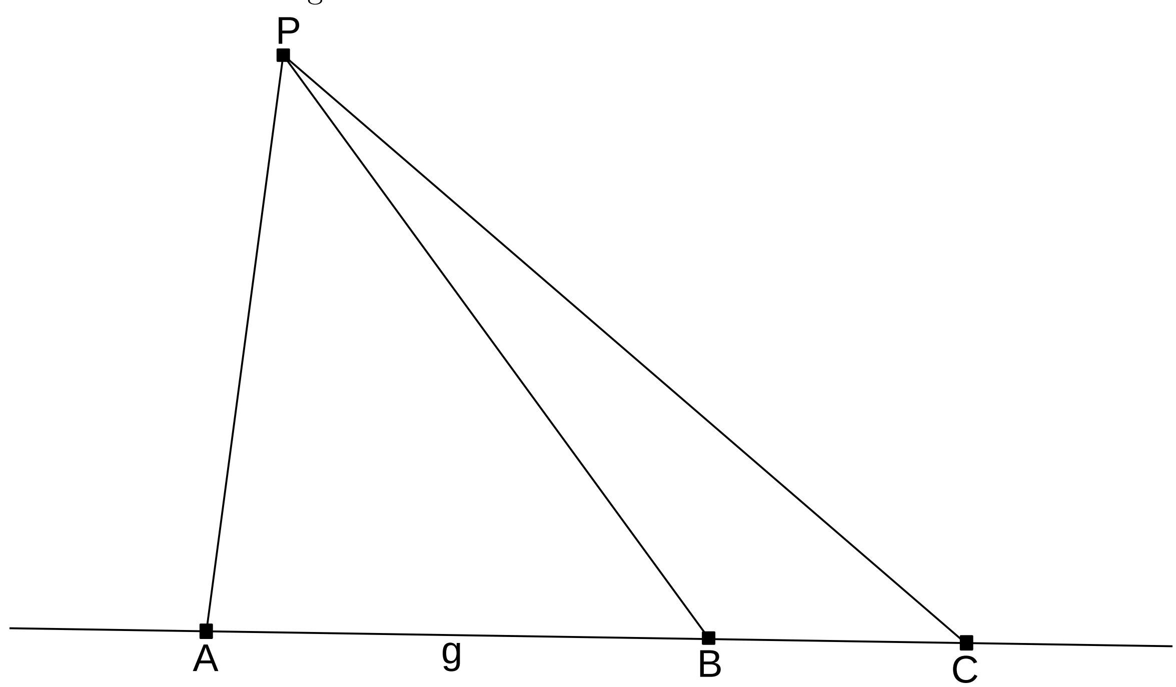

Fig. 4

Aus Satz 3 erhält man leicht folgenden Satz, der eine äquivalente Form des berühmten Satzes von Stewart ([1], §308) darstellt (Fig. 4):

Satz 4: Seien A, B und C drei paarweise verschiedene Punkte auf einer

Geraden g, und sei P ein Punkt. Wir richten die Gerade g. Dann ist

$$\frac{AP^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{BP^2}{\overline{BC} \cdot \overline{BA}} + \frac{CP^2}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = 1.$$

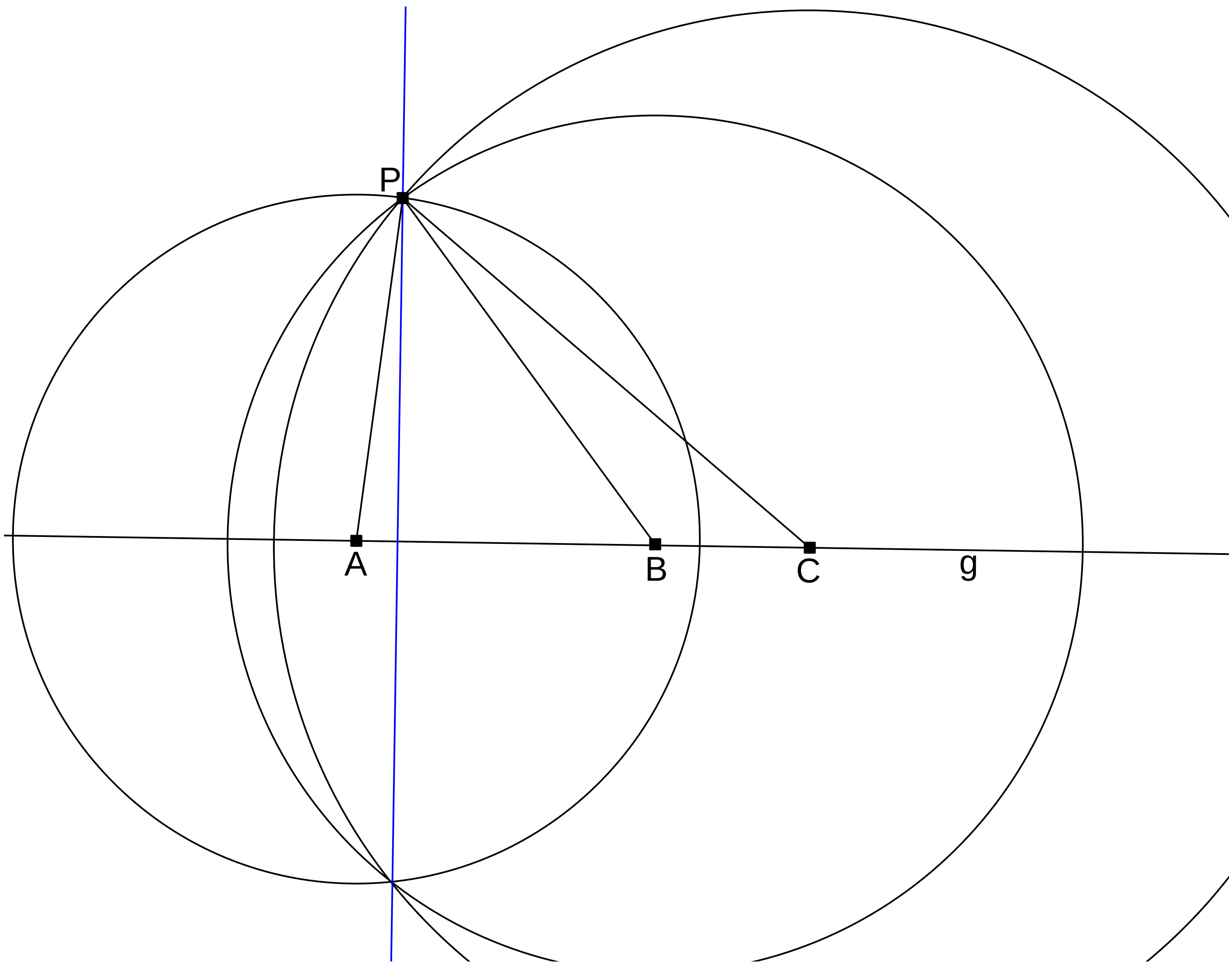

Fig. 5

Beweis von Satz 4: (Siehe Fig. 5.) Wir setzen $x = AP$, $y = BP$ und $z = CP$.

Dann ist $\operatorname{pot}(P;\ A(x)) = PA^2 - x^2 = AP^2 - x^2 = AP^2 - AP^2 = 0$ und analog $\operatorname{pot}(P;\ B(y)) = 0$. Damit ist $\operatorname{pot}(P;\ A(x)) = \operatorname{pot}(P;\ B(y))$, also $P \in \operatorname{rad}(A(x);\ B(y))$. Andererseits ist $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y)) \perp AB$ (nach (1)), also $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y)) \perp g$.

Aus $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y)) \perp g$ und $P \in \operatorname{rad}(A(x);\ B(y))$ folgt $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y)) = \operatorname{perp}(P;\ g)$. Analog ist $\operatorname{rad}(B(y);\ C(z)) = \operatorname{perp}(P;\ g)$ und $\operatorname{rad}(C(z);\ A(x)) = \operatorname{perp}(P;\ g)$. Daher ist $\operatorname{rad}(B(y);\ C(z)) = \operatorname{rad}(C(z);\ A(x)) = \operatorname{rad}(A(x);\ B(y))$. Folglich sind die Kreise $A(x)$, $B(y)$ und $C(z)$ koaxial. Somit ist die Aussage $\mathcal{A}_1$ von Satz 3 erfüllt. Laut Satz 3 sind aber die Aussagen $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ äquivalent. Daher muß auch die Aussage $\mathcal{A}_2$ von Satz 3 wahr sein. Insbesondere muß also $\frac{x^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} +$

$\frac{y^2}{\overline{BC} \cdot \overline{BA}} + \frac{z^2}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = 1$ gelten. Wegen $x = AP$, $y = BP$ und $z = CP$ wird dies zu

$$\frac{AP^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{BP^2}{\overline{BC} \cdot \overline{BA}} + \frac{CP^2}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = 1.$$

Damit ist Satz 4 bewiesen.

5. Inversion und Potenzgeraden

Bevor wir zu unserer nächsten, weniger trivialen Anwendung von Satz 2 kommen, stellen wir einen Hilfssatz zur Verfügung (Fig. 6):

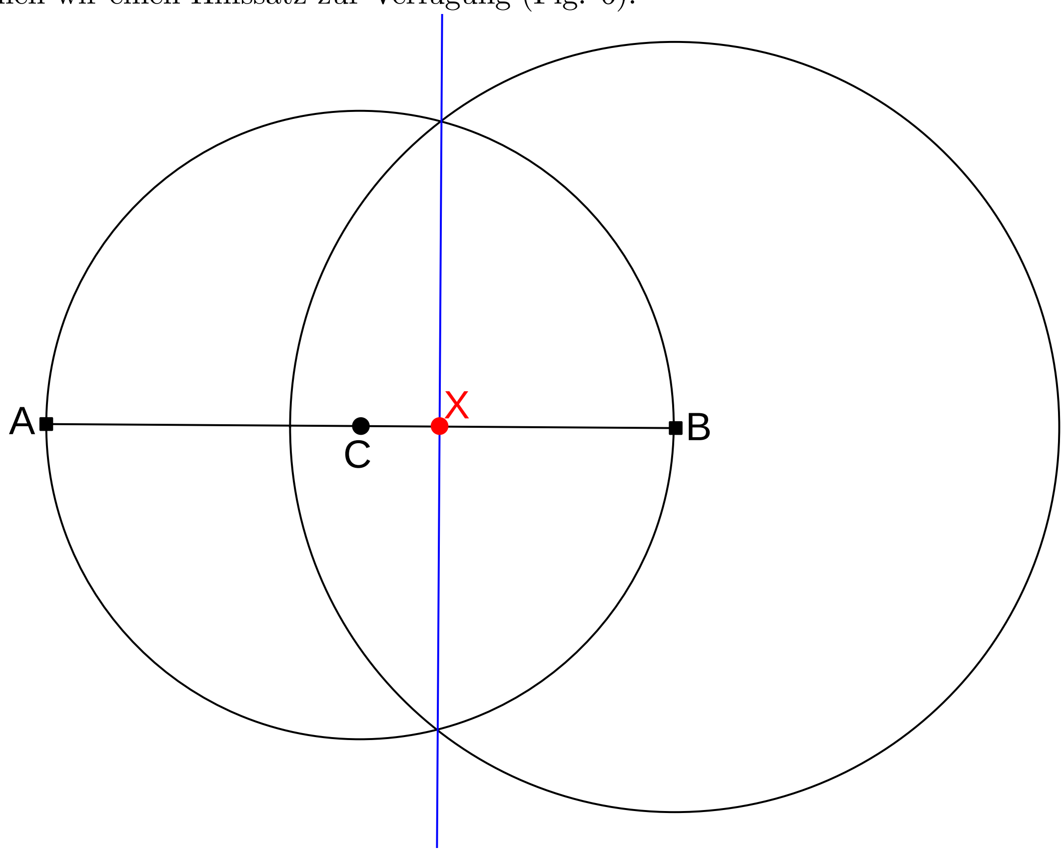

Fig. 6

Satz 5: Seien A und B zwei verschiedene Punkte, und sei y eine Zahl. Sei C der Mittelpunkt der Strecke AB. Sei X das Bild des Punktes A bei der Inversion am Kreis $B\left(y\right)$. Dann ist $X \in \operatorname{rad}\left(C\left(\frac{AB}{2}\right);\ B\left(y\right)\right)$. [4]

Beweis von Satz 5: Wir richten die Gerade BA in irgendeiner Weise. Der Punkt X ist das Bild des Punktes A bei der Inversion am Kreis $B\left(y\right)$. Daher liegt der Punkt X auf der Geraden BA, und es gilt $\overline{BX} \cdot \overline{BA} = y^2$.

[4] Natürlich ist der Kreis $C\left(\frac{AB}{2}\right)$ nichts anderes als der Thaleskreis über der Strecke AB.

Da der Punkt C der Mittelpunkt der Strecke AB ist, liegt er auf der Geraden BA und erfüllt $\overline{AC} = \overline{CB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$. Daher ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{pot}\left(X;\ C\left(\frac{AB}{2}\right)\right) &= XC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = XC^2 - \frac{1}{4} \cdot AB^2 = \overline{XC}^2 - \frac{1}{4} \cdot \overline{AB}^2 \\
&= \overline{XC}^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{AB}\right)^2 = \left(\overline{XC} - \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}\right) \cdot \left(\overline{XC} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}\right) \\
&= \left(\overline{XC} - \overline{AC}\right) \cdot \left(\overline{XC} + \overline{CB}\right) = \overline{XA} \cdot \overline{XB}.
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{pot}(X;\ B(y)) &= XB^2 - y^2 = BX^2 - y^2 = \overline{BX}^2 - y^2 = \overline{BX}^2 - \overline{BX} \cdot \overline{BA} = \overline{BX} \cdot \left(\overline{BX} - \overline{BA}\right) \\
&= \overline{BX} \cdot \overline{AX} = \left(-\overline{XB}\right) \cdot \left(-\overline{XA}\right) = \overline{XA} \cdot \overline{XB}.
\end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{pot}\left(X;\ C\left(\frac{AB}{2}\right)\right) = \operatorname{pot}(X;\ B(y))$, und daher ist $X \in \operatorname{rad}\left(C\left(\frac{AB}{2}\right);\ B(y)\right)$. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Mithilfe von Satz 2 **b)** und Satz 5 können wir einen Satz beweisen, der von Dave Wilson in [2] festgestellt wurde (Fig. 7):

> **Satz 6:** Seien A und B zwei verschiedene Punkte, und seien x und y zwei Zahlen. Sei X das Bild des Punktes A bei der Inversion am Kreis $B(y)$. Sei Y das Bild des Punktes B bei der Inversion am Kreis $A(x)$. Dann ist die Gerade $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y))$ die Mittelsenkrechte der Strecke XY.

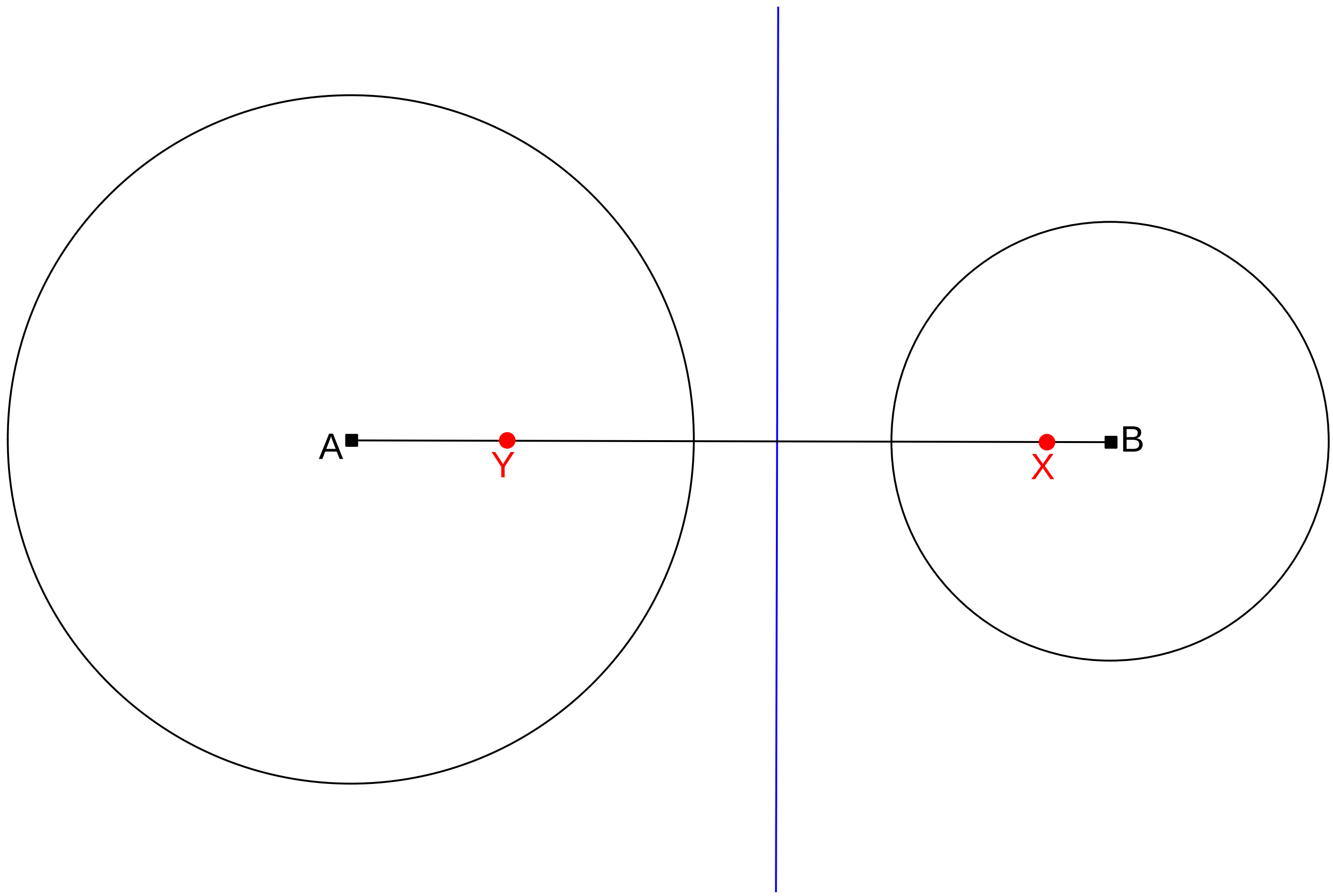

Fig. 7

Beweis von Satz 6: (Siehe Fig. 8.) Sei C der Mittelpunkt der Strecke AB. Nach Satz 5 ist dann $X \in \text{rad}\left(C\left(\frac{AB}{2}\right);\ B\left(y\right)\right)$. Andererseits ist der Punkt X das Bild des Punktes A bei der Inversion am Kreis $B\left(y\right)$, und liegt somit auf der Geraden BA. Wir haben also $X \in AB$. Zusammen mit $X \in \text{rad}\left(C\left(\frac{AB}{2}\right);\ B\left(y\right)\right)$ ergibt dies $X = \text{rad}\left(C\left(\frac{AB}{2}\right);\ B\left(y\right)\right) \cap AB$. Analog ist $Y = \text{rad}\left(C\left(\frac{AB}{2}\right);\ A\left(x\right)\right) \cap AB$.

Wir bezeichnen nun die Gerade AB mit g. Dann ist offensichtlich $A \in g$ und $B \in g$, und somit ist auch $C \in g$ (denn C ist der Mittelpunkt der Strecke AB). Somit liegen alle drei Punkte A, B und C auf der Geraden g.

Ferner setzen wir $z = \frac{AB}{2}$. Dann wird $X = \text{rad}\left(C\left(\frac{AB}{2}\right);\ B\left(y\right)\right) \cap AB$ zu $X = \text{rad}\left(C\left(z\right);\ B\left(y\right)\right) \cap g$, also zu $X = \text{rad}\left(B\left(y\right);\ C\left(z\right)\right) \cap g$. Außerdem wird $Y = \text{rad}\left(C\left(\frac{AB}{2}\right);\ A\left(x\right)\right) \cap AB$ zu $Y = \text{rad}\left(C\left(z\right);\ A\left(x\right)\right) \cap g$.

Sei nun $Z = \text{rad}\left(A\left(x\right);\ B\left(y\right)\right) \cap g$. Ferner richten wir die Gerade g. Dann erfüllen unsere Gerade g, unsere Punkte A, B und C, unsere Zahlen x, y und z und unsere Punkte X, Y und Z alle Bedingungen von Satz 2; wir können somit Satz 2 **b)** anwenden, und erhalten $\frac{\overline{YZ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ZX}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{AB}}$.

Insbesondere ist $\frac{\overline{YZ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ZX}}{\overline{CA}}$. Nun ist $\overline{BC} = \overline{CA}$ (denn der Punkt C ist der Mittelpunkt der Strecke AB). Also ist $\frac{\overline{YZ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ZX}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{ZX}}{\overline{BC}}$, und damit $\overline{YZ} = \overline{ZX}$. Somit ist der Punkt Z der Mittelpunkt der Strecke XY.

Nach (1) ist $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y)) \perp AB$. Nun ist die Gerade AB nichts anderes als die Gerade XY (denn alle vier Punkte A, B, X und Y liegen auf einer Geraden - nämlich auf der Geraden g). Somit wird $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y)) \perp AB$ zu $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y)) \perp XY$. Wegen $Z \in \operatorname{rad}(A(x);\ B(y))$ ist also $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y)) = \operatorname{perp}(Z;\ XY)$.

Doch da Z der Mittelpunkt der Strecke XY ist, ist die Gerade $\operatorname{perp}(Z;\ XY)$ die Mittelsenkrechte der Strecke XY. Daher bedeutet die Gleichung $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y)) = \operatorname{perp}(Z;\ XY)$, daß die Gerade $\operatorname{rad}(A(x);\ B(y))$ die Mittelsenkrechte der Strecke XY ist. Damit ist Satz 6 bewiesen.

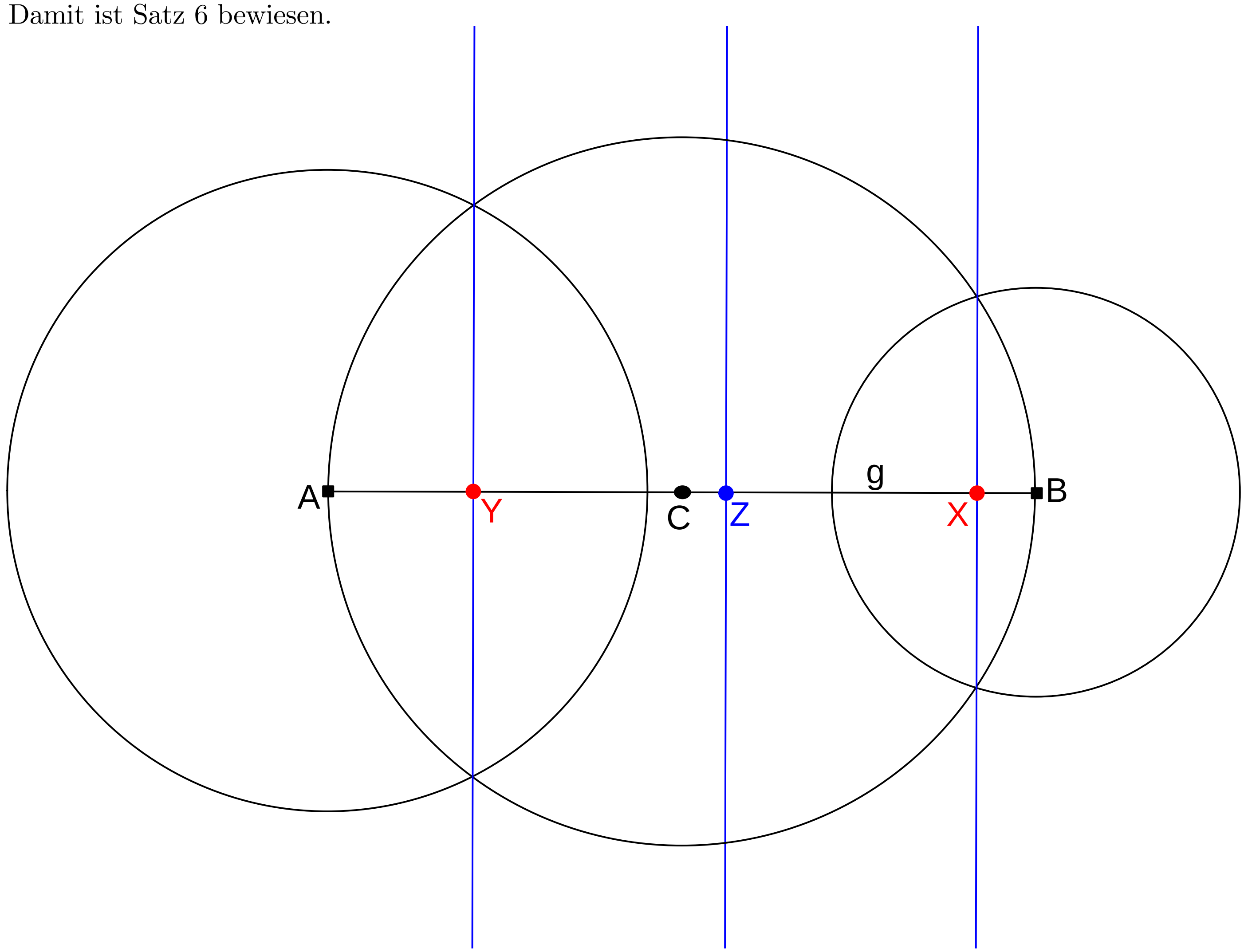

Fig. 8

6. Der Mittelpunkt des Taylorkreises

Der gerade bewiesene Satz 6 läßt sich in einigen Situationen überraschend anwenden. Wir zeigen hier eine solche Anwendung. Wir beginnen mit einem bekannten Satz:

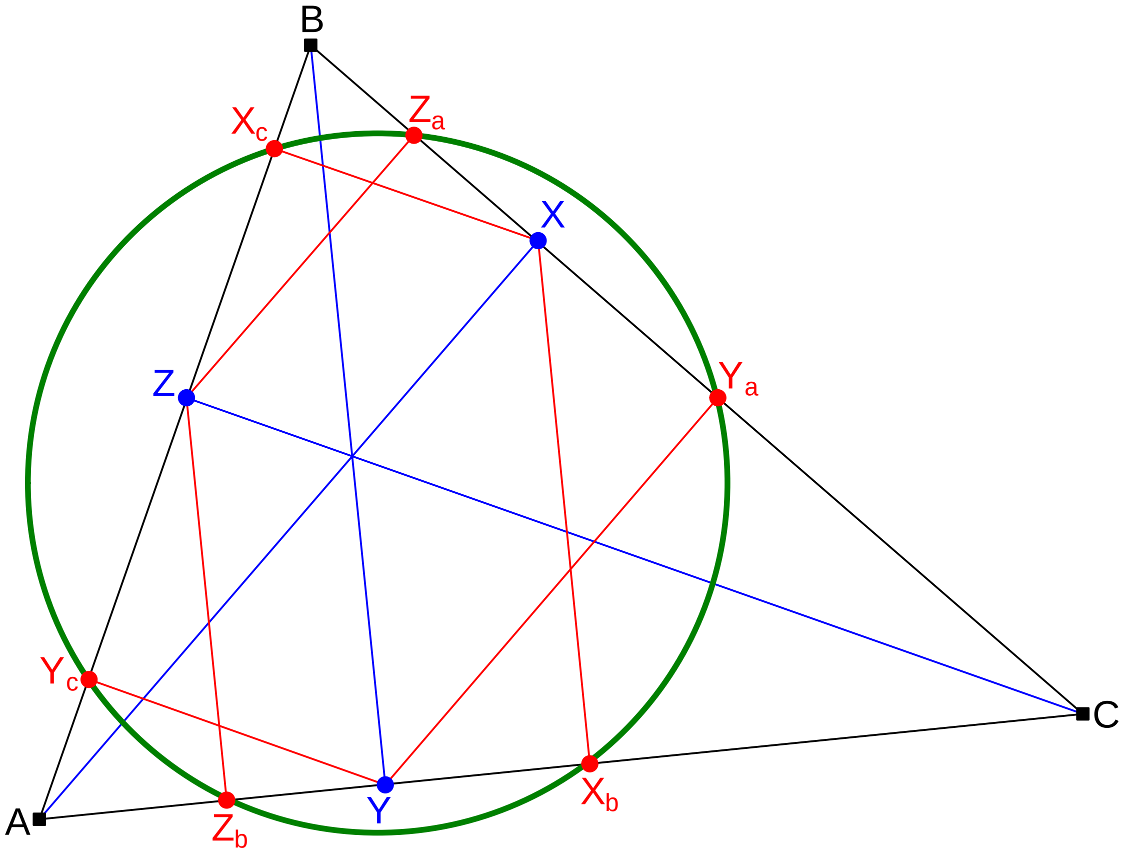

Fig. 9

> **Satz 7:** Sei ABC ein Dreieck, und seien X, Y und Z die Fußpunkte der von A, B bzw. C ausgehenden Höhen dieses Dreiecks.
>
> Seien X_b und X_c die Fußpunkte der Lote von dem Punkt X auf die Geraden CA bzw. AB.
>
> Seien Y_c und Y_a die Fußpunkte der Lote von dem Punkt Y auf die Geraden AB bzw. BC.
>
> Seien Z_a und Z_b die Fußpunkte der Lote von dem Punkt Z auf die Geraden BC bzw. CA.
>
> Dann liegen die Punkte X_b, X_c, Y_c, Y_a, Z_a und Z_b auf einem Kreis.
>
> Dieser Kreis heißt der *Taylorkreis* des Dreiecks ABC. (Siehe Fig. 9.)

Wir werden diesen Satz hier nicht nachweisen (der Leser kann sich den Beweis entweder selbst überlegen - er ist nicht schwer -, oder in [1], §689 oder [4], Chapter 9, §6 nachlesen). Wir zeigen hier vielmehr eine Eigenschaft des Mittelpunktes des Taylorkreises, die an obigen Satz anschließt.

Doch zuerst erinnern wir an den Begriff des Potenzzentrums dreier Kreise. Die Definition dieses Begriffes basiert auf folgendem Satz: Sind k, m und n drei Kreise mit paarweise verschiedenen Zentren, dann schneiden sich die Potenzgeraden $\operatorname{rad}(m;\ n)$, $\operatorname{rad}(n;\ k)$ und $\operatorname{rad}(k;\ m)$ in einem Punkt (der gegebenenfalls ein Fernpunkt sein kann). Dieser Punkt heißt das *Potenzzentrum der drei Kreise k, m und n.*

Jetzt können wir die versprochene Eigenschaft des Mittelpunktes des Taylorkreises formulieren (Fig. 10):

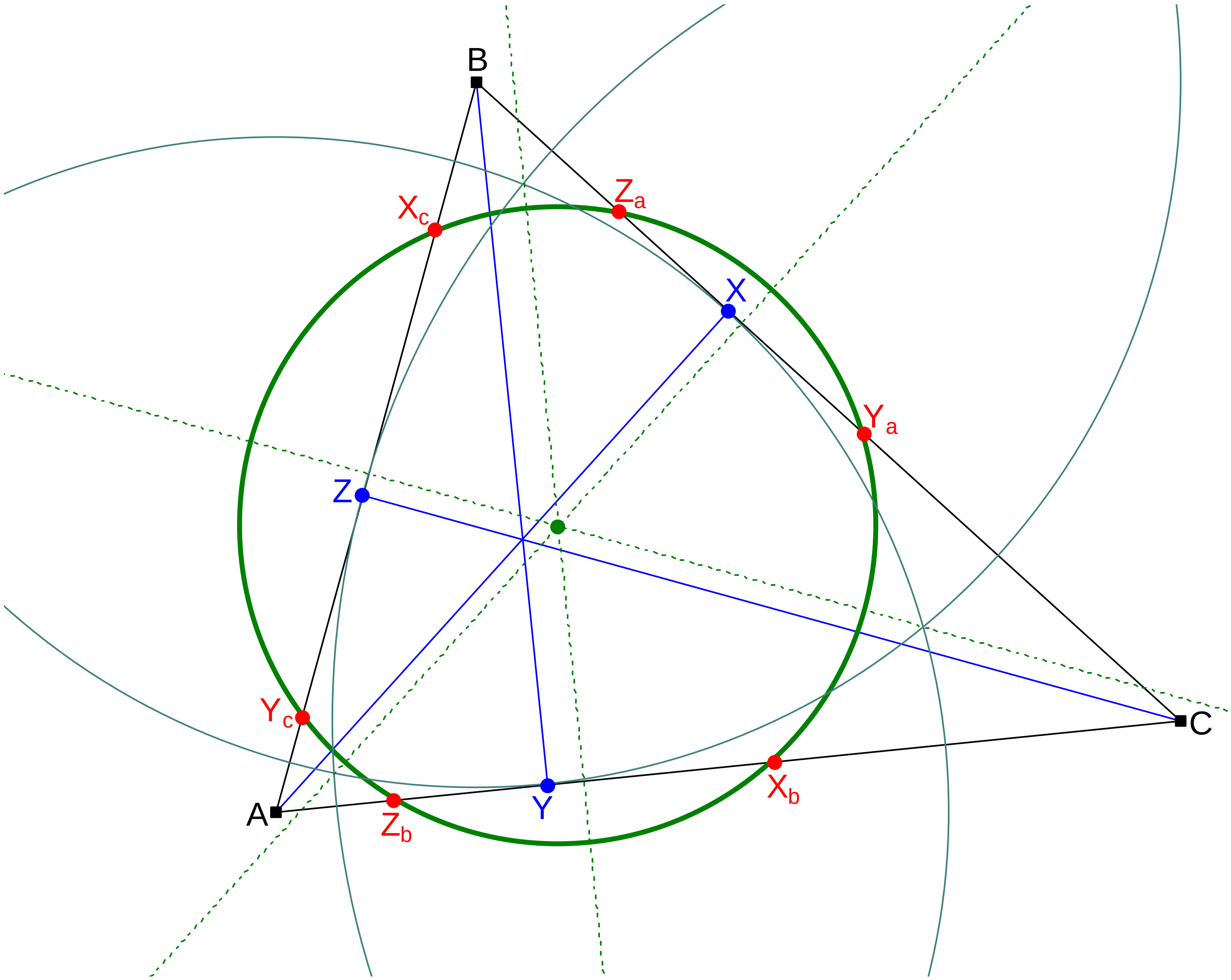

Fig. 10

Satz 8: Sei ABC ein Dreieck, und seien X, Y und Z die Fußpunkte der von A, B bzw. C ausgehenden Höhen dieses Dreiecks.

a) Der Kreis $A\,(AX)$ berührt die Gerade BC im Punkt X.

b) Das Potenzzentrum der Kreise $A\,(AX)$, $B\,(BY)$ und $C\,(CZ)$ ist der Mittelpunkt des Taylorkreises des Dreiecks ABC.

Beweis von Satz 8: Erstmal ist $BC \perp AX$ (denn die Gerade AX ist die von A ausgehende Höhe des Dreiecks ABC).

Der Punkt X liegt auf dem Kreis $A\,(AX)$ (denn $AX = AX$). Die Tangente an den Kreis $A\,(AX)$ im Punkt X ist offensichtlich die Senkrechte zur Geraden AX durch den Punkt X. Doch die Senkrechte zur Geraden AX durch den Punkt X ist die Gerade BC (denn $X \in BC$ und $BC \perp AX$). Somit ist die Tangente an den Kreis $A\,(AX)$ im Punkt X die Gerade BC. Das heißt, der Kreis $A\,(AX)$ berührt die Gerade BC im Punkt X. Damit ist Satz 8 **a)** bewiesen.

Nun zum Beweis von Satz 8 **b)**: (Siehe Fig. 11.) Seien die Punkte X_b, X_c, Y_c, Y_a, Z_a und Z_b so definiert wie in Satz 7.

Sei T der Mittelpunkt des Taylorkreises des Dreiecks ABC. Dann ist $TX_b = TZ_b$, denn der Taylorkreis des Dreiecks ABC geht durch die Punkte X_b und Z_b. Das heißt, der Punkt T liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke X_bZ_b.

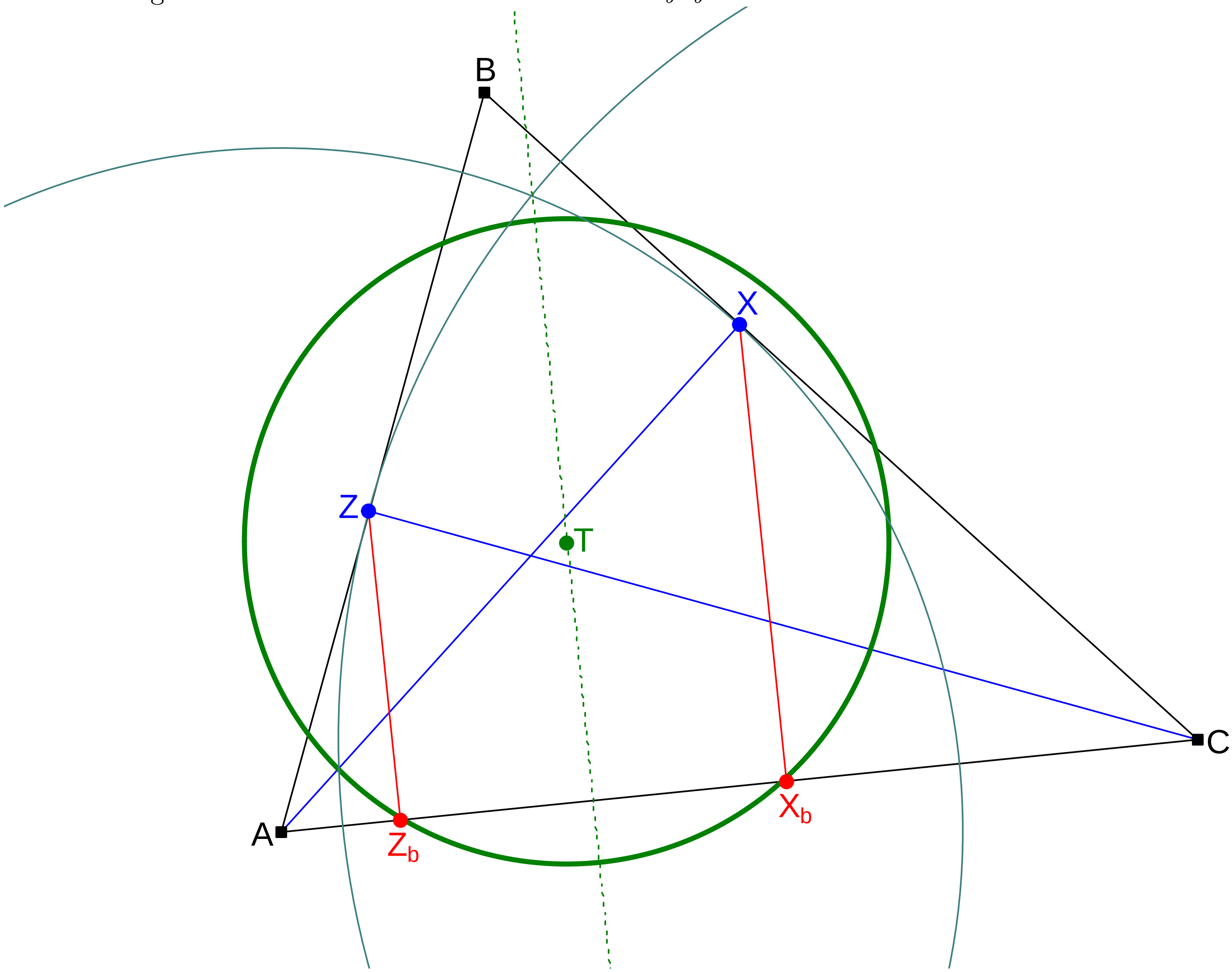

Fig. 11

Wir richten die Gerade CA auf irgendeine Weise.

Wir haben $\measuredangle AX_bX = 90^\circ$ und $\measuredangle AXC = 90^\circ$, also $\measuredangle AX_bX = \measuredangle AXC$. Ferner ist offensichtlich $\measuredangle X_bAX = \measuredangle XAC$. Also sind die Dreiecke AX_bX und AXC ähnlich (nach dem Ähnlichkeitskriterium ww). Somit ist $AX_b : AX = AX : AC$. Das heißt, $AX_b \cdot AC = AX^2$.

Wir fassen zusammen: Der Punkt X_b liegt auf dem Strahl AC und erfüllt die Relation $AX_b \cdot AC = AX^2$. Hieraus folgt: Der Punkt X_b ist das Bild des Punktes C bei der Inversion am Kreis $A\,(AX)$. Analog können wir zeigen, daß der Punkt Z_b das Bild des Punktes A bei der Inversion am Kreis $C\,(CZ)$ ist. Nach Satz 6 ist somit die Gerade $\mathrm{rad}\,(C\,(CZ)\,;\; A\,(AX))$ die Mittelsenkrechte der Strecke X_bZ_b. Da der Punkt T auf der Mittelsenkrechten der Strecke X_bZ_b liegt, erhalten wir somit: Der Punkt T liegt auf der Geraden $\mathrm{rad}\,(C\,(CZ)\,;\; A\,(AX))$. Analog können wir beweisen, daß der Punkt T auf den Geraden $\mathrm{rad}\,(A\,(AX)\,;\; B\,(BY))$ und $\mathrm{rad}\,(B\,(BY)\,;\; C\,(CZ))$ liegt. Somit ist der Punkt T der Schnittpunkt der Geraden $\mathrm{rad}\,(B\,(BY)\,;\; C\,(CZ))$, rad $(C(CZ);\ A(AX))$ und rad $(A(AX);\ B(BY))$, also das Potenzzentrum der Kreise $A(AX)$, $B(BY)$ und $C(CZ)$. Da der Punkt T der Mittelpunkt des Taylorkreises des Dreiecks ABC ist, erhalten wir somit: Der Mittelpunkt des Taylorkreises des Dreiecks ABC ist das Potenzzentrum der Kreise $A(AX)$, $B(BY)$ und $C(CZ)$. Damit ist Satz 8 **b)** bewiesen, und der Beweis von Satz 8 ist somit abgeschlossen.

Satz 8 **b)** stimmt überein mit Satz 2 aus [3] (und wurde in [3] trigonometrisch bewiesen). Inwieweit dieser Satz vor [3] bekannt war, ist mir nicht genau klar. (Aber zumindest in einer äquivalenten Form war er es bereits: In [5] wird beiläufig erwähnt, daß das Potenzzentrum der Kreise $A(AX)$, $B(BY)$ und $C(CZ)$ auf der Tuckergeraden des Dreiecks ABC liegt, und die Lage des Potenzzentrums auf der Tuckergeraden genauer spezialisiert - insgesamt ein Resultat, in dem der Taylorkreis nicht erwähnt wird, aus dem man aber mit Kenntnis weitergehender Eigenschaften des Taylorkreises den Satz 8 **b)** herleiten könnte.)

Literaturhinweise

[1] Nathan Altshiller-Court: *College Geometry*, second edition, New York 1952 (republication: 2007 by Dover Publications).

[2] Dave Wilson: *Radical Axis - A Generic Construction*, geometry-college posting: 12 December 2003.
`http://mathforum.org/kb/message.jspa?messageID=1072322&tstart=0`

[3] Darij Grinberg: *On the Taylor center of a triangle.*
`http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Taylor.zip`

[4] Ross Honsberger: *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, Washington 1995 (New Mathematical Library #37, published by the Mathematical Association of America).

[5] Roland Stärk: *Ein Verfahren, Punkte der Tuckergeraden eines Dreiecks zu konstruieren*, Praxis der Mathematik 5/1992, Seiten 213-215.