Deutsche AIMO 2022, Klausur 2

Darij Grinberg

March 11, 2022

1. Aufgaben

Wir verwenden die Notation $[k]$ für die Menge $\{1, 2, \ldots, k\}$, wobei k eine beliebige nichtnegative ganze Zahl ist.

Aufgabe 1. Seien n positive ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sowie m weitere positive ganze Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ so gewählt, dass $a_1 a_2 \cdots a_n = b_1 b_2 \cdots b_m$ gilt. Man zeige, dass man eine rechteckige Tabelle mit n Zeilen und m Spalten derart mit positiven ganzen Zahlen füllen kann, dass folgendes gilt:

- Das Produkt aller Zahlen in der i-ten Zeile ist a_i (für jedes $i \in [n]$).
- Das Produkt aller Zahlen in der j-ten Spalte ist b_j (für jedes $j \in [m]$).

Aufgabe 2. Gegeben seien zwei positive ganze Zahlen n und m und eine Funktion $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ mit der Eigenschaft, dass

$$f(i, j) = f(i + n, j) = f(i, j + m) \qquad \text{für alle } (i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

gilt.

Sei a die Anzahl aller $(i, j) \in [n] \times [m]$, die

$$f(i, j) = f(i + 1, j) = f(i, j + 1)$$

erfüllen. Sei b die Anzahl aller $(i, j) \in [n] \times [m]$, die

$$f(i, j) = f(i - 1, j) = f(i, j - 1)$$

erfüllen. Man beweise: $a = b$.

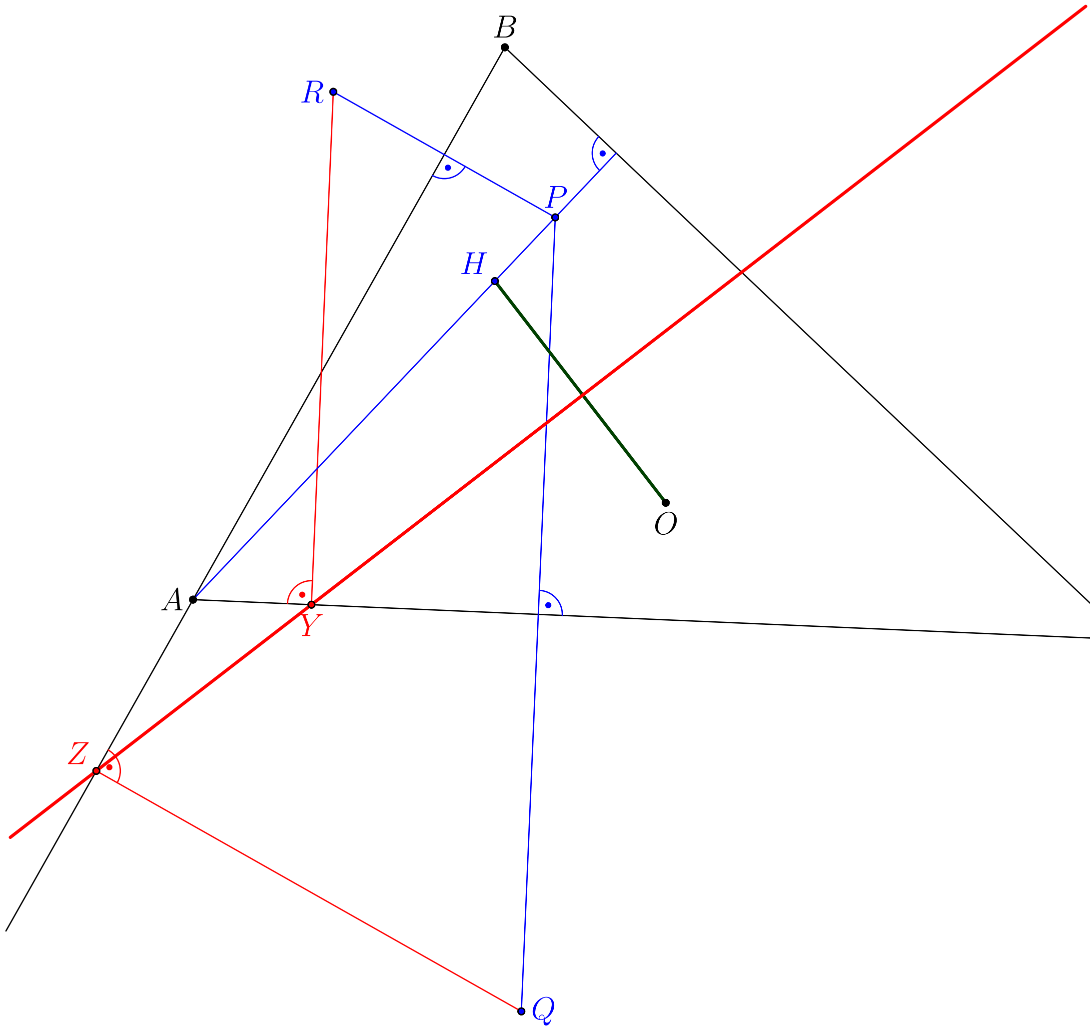

Fig. 1: zu Aufgabe 3

> **Aufgabe 3.** Sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt O. Sei P ein Punkt in der Ebene, der $AP \perp BC$ erfüllt. Seien Q und R die Spiegelbilder von P an den Geraden CA bzw. AB. Sei Y der Fußpunkt des Lotes von R auf die Gerade CA, und sei Z der Fußpunkt des Lotes von Q auf die Gerade AB. Wir nehmen an, dass $H \neq O$ und $Y \neq Z$ gilt. Man zeige: $YZ \perp HO$. (Siehe Fig. 1.)

2. Lösungen

Die nachfolgenden Lösungen sind meistens bewusst sehr detailliert geschrieben. In der Klausur wird so viel Detail nicht erwartet.

2.1. zu Aufgabe 1

Erste Lösung zu Aufgabe 1: Wir führen ein paar Abkürzungen ein:

Unter einer *Tabelle* verstehen wir fortan immer eine rechteckige Tabelle mit n Zeilen und m Spalten, die mit positiven ganzen Zahlen gefüllt ist.

Ist T eine Tabelle, und ist $i \in [n]$, dann definieren wir das *i-te Zeilenprodukt* von T als das Produkt aller Zahlen in der i-ten Zeile von T.

Ist T eine Tabelle, und ist $j \in [m]$, dann definieren wir das *j-te Spaltenprodukt* von T als das Produkt aller Zahlen in der j-ten Spalte von T.

Wir suchen nun eine Tabelle mit folgenden zwei Eigenschaften:

- Das i-te Zeilenprodukt ist a_i (für jedes $i \in [n]$).
- Das j-te Spaltenprodukt ist b_j (für jedes $j \in [m]$).

Eine derart gefüllte Tabelle bezeichnen wir fortan als eine *Faktortabelle* für die Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Die Aufgabe behauptet also, dass es für jegliche zwei Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ von positiven ganzen Zahlen, die $a_1 a_2 \cdots a_n = b_1 b_2 \cdots b_m$ erfüllen, eine Faktortabelle gibt.

Wir beweisen dies nun durch starke Induktion nach dem Produkt $a_1 a_2 \cdots a_n$. (Dieses Produkt ist stets eine positive ganze Zahl.)

Induktionsschritt: Sei N eine positive ganze Zahl. Wir nehmen als Induktionsannahme an, dass die Aufgabe im Fall von $a_1 a_2 \cdots a_n < N$ gilt. Wir müssen nun zeigen, dass sie auch im Fall von $a_1 a_2 \cdots a_n = N$ gilt.

Wir nehmen also an, dass $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ zwei Tupel von positiven ganzen Zahlen sind, die $a_1 a_2 \cdots a_n = b_1 b_2 \cdots b_m$ und $a_1 a_2 \cdots a_n = N$ erfüllen. Wir müssen dann beweisen, dass es eine Faktortabelle für diese zwei Tupel gibt.

Falls $N = 1$ gilt, dann ist dies leicht einzusehen[1]. Wir nehmen also o. B. d. A. an, dass $N \neq 1$ ist. Somit hat die positive ganze Zahl N einen Primteiler p (denn jede positive ganze Zahl außer 1 hat einen Primteiler). Betrachten wir nun diesen Primteiler p. Dann ist $p > 1$ und daher $\dfrac{N}{p} < N$ (denn N ist positiv). Da p ein Teiler von N ist, ist $p \mid N$, und daher ist $\dfrac{N}{p}$ eine positive ganze Zahl (denn N und p sind positiv).

Wir haben $p \mid N = a_1 a_2 \cdots a_n$. Da p eine Primzahl ist, folgt hieraus, dass $p \mid a_i$ für (mindestens) ein $i \in [n]$ gilt (denn wenn eine Primzahl ein Produkt von ganzen Zahlen teilt, dann muss sie auch mindestens einen Faktor dieses Produktes teilen).

[1] Und zwar wie folgt: Nehmen wir an, dass $N = 1$ gilt. Für jedes $i \in [n]$ gilt dann $a_i \mid a_1 a_2 \cdots a_n = N = 1$ und somit $a_i = 1$ (denn a_i ist eine positive ganze Zahl). Also sind alle n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gleich 1. Für jedes $j \in [m]$ gilt ferner $b_j \mid b_1 b_2 \cdots b_m = a_1 a_2 \cdots a_n = N = 1$ und somit $b_j = 1$. Also sind alle Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ebenfalls gleich 1. Daher ist klar, wie man eine Faktortabelle für unsere zwei Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ konstruiert: Man füllt einfach jede Zelle der Tabelle mit 1.

Betrachten wir dieses i. Aus $p \mid a_i$ folgt, dass $\frac{a_i}{p}$ eine positive ganze Zahl ist (denn p und a_i sind positiv).

Ferner ist $p \mid N = a_1 a_2 \cdots a_n = b_1 b_2 \cdots b_m$. Da p eine Primzahl ist, folgt hieraus, dass $p \mid b_j$ für (mindestens) ein $j \in [m]$ gilt (denn wenn eine Primzahl ein Produkt von ganzen Zahlen teilt, dann muss sie auch mindestens einen Faktor dieses Produktes teilen). Betrachten wir dieses j. Aus $p \mid b_j$ folgt, dass $\frac{b_j}{p}$ eine positive ganze Zahl ist (denn p und b_j sind positiv).

Nun betrachten wir die zwei Tupel

$$\left(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, \frac{a_i}{p}, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n\right) \qquad \text{und}$$
$$\left(b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}, \frac{b_j}{p}, b_{j+1}, b_{j+2}, \ldots, b_m\right).$$

Diese zwei Tupel bestehen aus positiven ganzen Zahlen (denn $\frac{a_i}{p}$ und $\frac{b_j}{p}$ sind positive ganze Zahlen, und alle anderen Einträge sind es sowieso), und erfüllen

$$a_1 a_2 \cdots a_{i-1} \frac{a_i}{p} a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_n = \frac{1}{p} \cdot \underbrace{a_1 a_2 \cdots a_n}_{=N} = \frac{1}{p} \cdot N = \frac{N}{p}$$

und

$$b_1 b_2 \cdots b_{j-1} \frac{b_j}{p} b_{j+1} b_{j+2} \cdots b_m = \frac{1}{p} \underbrace{b_1 b_2 \cdots b_m}_{=a_1 a_2 \cdots a_n = N} = \frac{1}{p} \cdot N = \frac{N}{p}$$

und deshalb

$$a_1 a_2 \cdots a_{i-1} \frac{a_i}{p} a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_n = \frac{N}{p} = b_1 b_2 \cdots b_{j-1} \frac{b_j}{p} b_{j+1} b_{j+2} \cdots b_m.$$

Folglich können wir die Induktionsannahme auf diese beiden Tupel anstelle von $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ anwenden (denn $\frac{N}{p}$ ist eine positive ganze Zahl mit $\frac{N}{p} < N$). Wir erhalten dadurch, dass es eine Faktortabelle für diese zwei Tupel gilt. Sei T diese Faktortabelle. Das i-te Zeilenprodukt von T ist also $\frac{a_i}{p}$, während das j-te Spaltenprodukt gleich $\frac{b_j}{p}$ ist. Alle anderen Zeilenprodukte und Spaltenprodukte sind genau so, wie wir sie gerne hätten (d.h., das u-te Zeilenprodukt für jedes $u \neq i$ ist a_u, und das v-te Spaltenprodukt für jedes $v \neq j$ ist b_v).

Nun multiplizieren wir den (i, j)-ten Eintrag von T (also den Eintrag in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte) mit p. Dadurch multiplizieren sich sowohl das i-te Zeilenprodukt als auch das j-te Spaltenprodukt mit p, und werden somit zu a_i

und b_j (denn sie waren ursprünglich $\frac{a_i}{p}$ und $\frac{b_j}{p}$). Die anderen Zeilenprodukte und Spaltenprodukte bleiben unverändert, und sind daher weiterhin so, wie wir sie gerne hätten.

Die resultierende Tabelle hat also die Zeilenprodukte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (in den Zeilen $1, 2, \ldots, n$) und die Spaltenprodukte $b_1, b_2, \ldots, b_m$ (in den Spalten $1, 2, \ldots, m$). Sie ist daher eine Faktortabelle für die zwei Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Damit haben wir gezeigt, dass es eine solche Faktortabelle gibt. Der Induktionsschritt ist damit vollständig, und die Aufgabe somit gelöst. □

Zweite Lösung zu Aufgabe 1: Die nachfolgende Lösung ist länger und schwieriger als die erste, hat aber den Vorteil, dass die Einträge der Tabelle explizit angegeben werden.

Wir erinnern uns zunächst an drei Lemmas aus der elementaren Zahlentheorie, die allgemein bekannt sein sollten:[2]

Lemma 2.1. Seien m, a und b drei positive ganze Zahlen. Wenn $m \mid a$ und $m \mid b$ gilt, dann gilt auch $m \mid \operatorname{ggT}(a, b)$.

Lemma 2.2. Seien s, a und b drei positive ganze Zahlen. Dann gilt $\operatorname{ggT}(sa, sb) = s \cdot \operatorname{ggT}(a, b)$.

Lemma 2.3. Seien a, b, c und d vier ganze Zahlen, die $a \mid b$ und $c \mid d$ erfüllen. Dann gilt $ac \mid bd$.

Mithilfe dieser drei Lemmas zeigen wir folgendes Lemma:

Lemma 2.4. Seien u, v, x und y vier positive ganze Zahlen. Dann gilt

$$\operatorname{ggT}(ux, v) \cdot \operatorname{ggT}(u, vy) \mid \operatorname{ggT}(u, v) \cdot \operatorname{ggT}(ux, vy).$$

Beweis zu Lemma 2.4: Sei $g = \operatorname{ggT}(u, v)$. Dann ist g eine positive ganze Zahl, die $g \mid u$ und $g \mid v$ erfüllt.

Nach der Definition eines ggT gilt $\operatorname{ggT}(ux, v) \mid ux$ und $\operatorname{ggT}(ux, v) \mid v \mid vx$. Laut Lemma 2.1 (angewandt auf $m = \operatorname{ggT}(ux, v)$, $a = ux$ und $b = vx$) gilt also

$$\begin{aligned} \operatorname{ggT}(ux, v) \mid \operatorname{ggT}(ux, vx) &= \operatorname{ggT}(xu, xv) \qquad \text{(denn } ux = xu \text{ und } vx = xv\text{)} \\ &= x \cdot \operatorname{ggT}(u, v) \end{aligned}$$

(nach Lemma 2.2, angewandt auf $s = x$, $a = u$ und $b = v$). Wegen $\operatorname{ggT}(u, v) = g$ können wir dies folgendermaßen umformulieren:

$$\operatorname{ggT}(ux, v) \mid x \cdot g.$$

[2] Lemma 2.2 und Lemma 2.1 lassen sich von positiven ganzen Zahlen auf ganze Zahlen ausdehnen, wobei man dann in Lemma 2.2 aber das s auf der rechten Seite durch $|s|$ ersetzen muss. Aber wir werden es hier nur mit positiven ganzen Zahlen zu tun haben.

Zusammen mit der Teilbarkeit $\operatorname{ggT}(u, vy) \mid u$ (welche aus der Definition eines ggT folgt) ergibt dies

$$\operatorname{ggT}(ux, v) \cdot \operatorname{ggT}(u, vy) \mid x \cdot g \cdot u \tag{1}$$

(nach Lemma 2.3, angewandt auf $a = \operatorname{ggT}(ux, v)$, $b = x \cdot g$, $c = \operatorname{ggT}(u, vy)$ und $d = u$).

Nach der Definition eines ggT gilt $\operatorname{ggT}(u, vy) \mid u \mid uy$ und $\operatorname{ggT}(u, vy) \mid vy$. Laut Lemma 2.1 (angewandt auf $m = \operatorname{ggT}(u, vy)$, $a = uy$ und $b = vy$) gilt also

$$\begin{aligned} \operatorname{ggT}(u, vy) \mid \operatorname{ggT}(uy, vy) &= \operatorname{ggT}(yu, yv) \qquad \text{(denn } uy = yu \text{ und } vy = yv) \\ &= y \cdot \operatorname{ggT}(u, v) \end{aligned}$$

(nach Lemma 2.2, angewandt auf $s = y$, $a = u$ und $b = v$). Wegen $\operatorname{ggT}(u, v) = g$ können wir dies folgendermaßen umformulieren:

$$\operatorname{ggT}(u, vy) \mid y \cdot g.$$

Zusammen mit der Teilbarkeit $\operatorname{ggT}(ux, v) \mid v$ (welche aus der Definition eines ggT folgt) ergibt dies

$$\operatorname{ggT}(ux, v) \cdot \operatorname{ggT}(u, vy) \mid v \cdot y \cdot g \tag{2}$$

(nach Lemma 2.3, angewandt auf $a = \operatorname{ggT}(ux, v)$, $b = v$, $c = \operatorname{ggT}(u, vy)$ und $d = y \cdot g$).

Nun haben wir die zwei Teilbarkeiten (1) und (2) bewiesen. Wegen Lemma 2.1 (angewandt auf $m = \operatorname{ggT}(ux, v) \cdot \operatorname{ggT}(u, vy)$, $a = x \cdot g \cdot u$ und $b = v \cdot y \cdot g$) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \operatorname{ggT}(ux, v) \cdot \operatorname{ggT}(u, vy) \mid \operatorname{ggT}\left(\underbrace{x \cdot g \cdot u}_{=gux}, \underbrace{v \cdot y \cdot g}_{=gvy}\right) &= \operatorname{ggT}(gux, gvy) \\ &= g \cdot \operatorname{ggT}(ux, vy) \end{aligned}$$

(nach Lemma 2.2, angewandt auf $s = g$, $a = ux$ und $b = vy$). Wegen $g = \operatorname{ggT}(u, v)$ können wir dies umschreiben als

$$\operatorname{ggT}(ux, v) \cdot \operatorname{ggT}(u, vy) \mid \operatorname{ggT}(u, v) \cdot \operatorname{ggT}(ux, vy).$$

Damit ist Lemma 2.4 bewiesen. $\square$

(Alternativ läßt sich Lemma 2.4 maschinell durch Vergleich von p-Bewertungen beweisen, oder auch durch etwas eleganter durch Kürzen von $\operatorname{ggT}(u, v)$ aus u und v.)

Nun kommen wir zur eigentlichen Lösung der Aufgabe. Für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ setzen wir

$$u_i = a_1 a_2 \cdots a_i.$$

Für jedes $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ setzen wir

$$v_j = b_1 b_2 \cdots b_j.$$

(Somit gilt $u_0 = v_0 = 1$, denn ein leeres Produkt ist definitionsgemäß 1.)

Für beliebige $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ und $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ setzen wir

$$p_{i,j} = \operatorname{ggT}(u_i, v_j) . \tag{3}$$

Dies ist eine positive ganze Zahl.

Schließlich setzen wir

$$x_{i,j} = \frac{p_{i,j} p_{i-1,j-1}}{p_{i,j-1} p_{i-1,j}} \tag{4}$$

für alle $i \in [n]$ und $j \in [m]$. Nun behaupten wir folgendes:

> *Behauptung 1:* Für beliebige $i \in [n]$ und $j \in [m]$ ist $x_{i,j}$ eine positive ganze Zahl.
>
> *Behauptung 2:* Für jedes $i \in [n]$ ist $\prod_{j=1}^{m} x_{i,j} = a_i$.
>
> *Behauptung 3:* Für jedes $j \in [m]$ ist $\prod_{i=1}^{n} x_{i,j} = b_j$.

Zum Beweis benötigen wir vorerst zwei weitere triviale Lemmas über ggTs:

Lemma 2.5. Für jede positive ganze Zahl b gilt $\operatorname{ggT}(1, b) = 1$.

Lemma 2.6. Seien a und b zwei positive ganze Zahlen, die $a \mid b$ erfüllen. Dann ist $\operatorname{ggT}(a, b) = a$.

Jetzt können wir die obigen drei Behauptungen beweisen:

Beweis von Behauptung 1: Seien $i \in [n]$ und $j \in [m]$ beliebig. Laut der Definition von u_i ist dann $u_i = a_1 a_2 \cdots a_i$. Laut der Definition von u_{i-1} ist jedoch $u_{i-1} = a_1 a_2 \cdots a_{i-1}$. Daher ist

$$u_i = a_1 a_2 \cdots a_i = \underbrace{(a_1 a_2 \cdots a_{i-1})}_{= u_{i-1}} a_i = u_{i-1} a_i .$$

Analog erhält man $v_j = v_{j-1} b_j$. Nach Lemma 2.4 (angewandt auf $u = u_{i-1}$, $v = v_{j-1}$, $x = a_i$ und $y = b_j$) gilt jedoch

$$\operatorname{ggT}(u_{i-1} a_i, v_{j-1}) \cdot \operatorname{ggT}(u_{i-1}, v_{j-1} b_j) \mid \operatorname{ggT}(u_{i-1}, v_{j-1}) \cdot \operatorname{ggT}(u_{i-1} a_i, v_{j-1} b_j) .$$

Wegen $u_{i-1} a_i = u_i$ und $v_{j-1} b_j = v_j$ vereinfacht sich dies zu

$$\operatorname{ggT}(u_i, v_{j-1}) \cdot \operatorname{ggT}(u_{i-1}, v_j) \mid \operatorname{ggT}(u_{i-1}, v_{j-1}) \cdot \operatorname{ggT}(u_i, v_j) . \tag{5}$$

Aus (4) folgt aber

$$x_{i,j} = \frac{p_{i,j} p_{i-1,j-1}}{p_{i,j-1} p_{i-1,j}} = \frac{p_{i-1,j-1} \cdot p_{i,j}}{p_{i,j-1} \cdot p_{i-1,j}} = \frac{\operatorname{ggT}(u_{i-1}, v_{j-1}) \cdot \operatorname{ggT}(u_i, v_j)}{\operatorname{ggT}(u_i, v_{j-1}) \cdot \operatorname{ggT}(u_{i-1}, v_j)}$$

(denn aus (3) folgt $p_{i-1,j-1} = \operatorname{ggT}(u_{i-1}, v_{j-1})$ und $p_{i,j} = \operatorname{ggT}(u_i, v_j)$ und $p_{i,j-1} = \operatorname{ggT}(u_i, v_{j-1})$ und $p_{i-1,j} = \operatorname{ggT}(u_{i-1}, v_j)$). Der Quotient auf der rechten Seite dieser Gleichung ist aber eine ganze Zahl (denn laut (5) ist der Zähler durch den Nenner teilbar[3]). Somit ist auch die linke Seite, also $x_{i,j}$, eine ganze Zahl. Da $x_{i,j}$ ferner positiv ist (dies folgt aus (4), weil $p_{i,j}$, $p_{i-1,j-1}$, $p_{i,j-1}$ und $p_{i-1,j}$ positiv sind), haben wir damit gezeigt, dass $x_{i,j}$ eine positive ganze Zahl ist. Damit ist Behauptung 1 bewiesen. $\square$

Beweis von Behauptung 2: Sei $i \in [n]$. Wie im obigen Beweis von Behauptung 1 erhalten wir $u_i = u_{i-1} a_i$.

Für jedes $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ setzen wir $r_j = \dfrac{p_{i,j}}{p_{i-1,j}}$. Für jedes $j \in [m]$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\frac{r_j}{r_{j-1}} &= \underbrace{r_j}_{\substack{= \frac{p_{i,j}}{p_{i-1,j}} \\ \text{(nach der Definition von } r_j)}} \Big/ \underbrace{r_{j-1}}_{\substack{= \frac{p_{i,j-1}}{p_{i-1,j-1}} \\ \text{(nach der Definition von } r_{j-1})}} \\
&= \frac{p_{i,j}}{p_{i-1,j}} \Big/ \frac{p_{i,j-1}}{p_{i-1,j-1}} = \frac{p_{i,j} p_{i-1,j-1}}{p_{i,j-1} p_{i-1,j}} = x_{i,j}
\end{aligned} \tag{6}$$

(laut (4)).

Nun ist

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{m} \underbrace{x_{i,j}}_{\substack{= \frac{r_j}{r_{j-1}} \\ \text{(laut (6))}}} &= \prod_{j=1}^{m} \frac{r_j}{r_{j-1}} = \frac{r_1}{r_0} \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_2} \cdot \cdots \cdot \frac{r_m}{r_{m-1}} \\
&= \frac{r_m}{r_0}
\end{aligned} \tag{7}$$

(nach dem Teleskopprinzip für Produkte).

Nun wollen wir r_m und r_0 bestimmen.

Zunächst bemerken wir, dass $v_m = b_1 b_2 \cdots b_m$ gilt (laut Definition von v_m). Laut Definition von u_i ist aber

$$\begin{aligned}
u_i = a_1 a_2 \cdots a_i &\mid a_1 a_2 \cdots a_n \qquad (\text{denn } i \leq n) \\
&= b_1 b_2 \cdots b_m = v_m.
\end{aligned}$$

Laut Lemma 2.6 (angewandt auf $a = u_i$ und $b = v_m$) ist also $\operatorname{ggT}(u_i, v_m) = u_i$. Laut Definition von $p_{i,m}$ ist aber $p_{i,m} = \operatorname{ggT}(u_i, v_m) = u_i$. Das gleiche Argument (aber angewendet auf $i-1$ statt i) ergibt $p_{i-1,m} = u_{i-1}$. Die Definition von r_m ergibt nun

$$r_m = \frac{p_{i,m}}{p_{i-1,m}} = \underbrace{p_{i,m}}_{=u_i} \Big/ \underbrace{p_{i-1,m}}_{=u_{i-1}} = u_i / u_{i-1} = a_i \qquad (\text{denn } u_i = u_{i-1} a_i).$$

[3] Und da alle vorkommenden Zahlen positiv sind, brauchen wir uns keine Sorgen wegen Division durch Null zu machen.

Laut Definition von v_0 ist $v_0 = b_1 b_2 \cdots b_0 = 1$ (denn ein leeres Produkt ist definitionsgemäß 1). Laut Definition von $p_{i,0}$ ist aber

$$p_{i,0} = \operatorname{ggT}\left(u_i, \underbrace{v_0}_{=1}\right) = \operatorname{ggT}(u_i, 1) = \operatorname{ggT}(1, u_i) = 1$$

(nach Lemma 2.5, angewandt auf $b = u_i$). Das gleiche Argument (aber angewendet auf $i-1$ statt i) ergibt $p_{i-1,0} = 1$. Die Definition von r_0 ergibt nun

$$r_0 = \frac{p_{i,0}}{p_{i-1,0}} = \underbrace{p_{i,0}}_{=1} \big/ \underbrace{p_{i-1,0}}_{=1} = 1/1 = 1.$$

Aus (7) wird nun

$$\prod_{j=1}^{m} x_{i,j} = \frac{r_m}{r_0} = \underbrace{r_m}_{=a_i} \big/ \underbrace{r_0}_{=1} = a_i/1 = a_i.$$

Damit ist Behauptung 2 bewiesen. $\square$

Beweis von Behauptung 3: Dieser Beweis ist dem obigen Beweis von Behauptung 2 sehr ähnlich; wir geben ihn hier nur der Vollständigkeit halber an.

Sei $j \in [m]$. Wie im obigen Beweis von Behauptung 1 erhalten wir $v_j = v_{j-1} b_j$.

Für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ setzen wir $q_i = \dfrac{p_{i,j}}{p_{i,j-1}}$. Für jedes $i \in [n]$ gilt dann

$$\begin{aligned}\frac{q_i}{q_{i-1}} &= \underbrace{q_i}_{\substack{=\frac{p_{i,j}}{p_{i,j-1}} \\ \text{(nach der Definition von } q_i\text{)}}} \Big/ \underbrace{q_{i-1}}_{\substack{=\frac{p_{i-1,j}}{p_{i-1,j-1}} \\ \text{(nach der Definition von } q_{i-1}\text{)}}} \\ &= \frac{p_{i,j}}{p_{i,j-1}} \Big/ \frac{p_{i-1,j}}{p_{i-1,j-1}} = \frac{p_{i,j} p_{i-1,j-1}}{p_{i,j-1} p_{i-1,j}} = x_{i,j} \qquad (8)\end{aligned}$$

(laut (4)).

Nun ist

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} \underbrace{x_{i,j}}_{\substack{=\frac{q_i}{q_{i-1}} \\ \text{(laut (8))}}} &= \prod_{i=1}^{n} \frac{q_i}{q_{i-1}} = \frac{q_1}{q_0} \cdot \frac{q_2}{q_1} \cdot \frac{q_3}{q_2} \cdot \cdots \cdot \frac{q_n}{q_{n-1}} \\ &= \frac{q_n}{q_0} \qquad (9)\end{aligned}$$

(nach dem Teleskopprinzip für Produkte).

Nun wollen wir q_n und q_0 bestimmen.

Zunächst bemerken wir, dass $u_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ gilt (laut Definition von u_n). Laut Definition von v_j ist aber

$$\begin{aligned} v_j &= b_1 b_2 \cdots b_j \mid b_1 b_2 \cdots b_m && (\text{denn } j \leq m) \\ &= a_1 a_2 \cdots a_n && (\text{denn } a_1 a_2 \cdots a_n = b_1 b_2 \cdots b_m) \\ &= u_n. \end{aligned}$$

Laut Lemma 2.6 (angewandt auf $a = v_j$ und $b = u_n$) ist also $\operatorname{ggT}(v_j, u_n) = v_j$. Laut Definition von $p_{n,j}$ ist aber $p_{n,j} = \operatorname{ggT}(u_n, v_j) = \operatorname{ggT}(v_j, u_n) = v_j$. Das gleiche Argument (aber angewendet auf $j-1$ statt j) ergibt $p_{n,j-1} = v_{j-1}$. Die Definition von q_n ergibt nun

$$q_n = \frac{p_{n,j}}{p_{n,j-1}} = \underbrace{p_{n,j}}_{=v_j} \big/ \underbrace{p_{n,j-1}}_{=v_{j-1}} = v_j / v_{j-1} = b_j \qquad (\text{denn } v_j = v_{j-1} b_j).$$

Laut Definition von u_0 ist $u_0 = a_1 a_2 \cdots a_0 = 1$ (denn ein leeres Produkt ist definitionsgemäß 1). Laut Definition von $p_{0,j}$ ist aber

$$p_{0,j} = \operatorname{ggT}\left(\underbrace{u_0}_{=1}, v_j \right) = \operatorname{ggT}(1, v_j) = 1$$

(nach Lemma 2.5, angewandt auf $b = v_j$). Das gleiche Argument (aber angewendet auf $j-1$ statt j) ergibt $p_{0,j-1} = 1$. Die Definition von q_0 ergibt nun

$$q_0 = \frac{p_{0,j}}{p_{0,j-1}} = \underbrace{p_{0,j}}_{=1} \big/ \underbrace{p_{0,j-1}}_{=1} = 1/1 = 1.$$

Aus (9) wird nun

$$\prod_{i=1}^{n} x_{i,j} = \frac{q_n}{q_0} = \underbrace{q_n}_{=b_j} \big/ \underbrace{q_0}_{=1} = b_j / 1 = b_j.$$

Damit ist Behauptung 3 bewiesen. □

Nun sind wir von der Behauptung der Aufgabe nur einen Steinwurf entfernt: Wir können unsere Tabelle mit den Zahlen $x_{i,j}$ füllen (d.h., wir schreiben die Zahl $x_{i,j}$ in die Zelle in Zeile i und Spalte j für alle $i \in [n]$ und $j \in [m]$). Wegen Behauptung 1 ist dadurch die Tabelle mit positiven ganzen Zahlen gefüllt. Wegen Behauptung 2 ist das Produkt aller Zahlen in der i-ten Zeile gleich a_i (für jedes $i \in [n]$). Wegen Behauptung 3 ist das Produkt aller Zahlen in der j-ten Spalte gleich b_j (für jedes $j \in [m]$). Diese Füllung der Tabelle erfüllt also die Eigenschaften, die in der Aufgabe verlangt wurden. Damit ist die Aufgabe gelöst. □

Bemerkung 2.7. Aufgabe 1 ist inspiriert von der "pre-pre-Schreier condition" in `https://mathoverflow.net/questions/14555/first-order-ufd-factorial-ring-condition-pre-schreier-rings` .

Bemerkung 2.8. Aufgabe 1 läßt sich ein wenig verkomplizieren (und zumindest teilweise verallgemeinern), indem man das Wort "positiv" überall weglässt. Es gilt also folgendes:

> **Aufgabe 4.** Seien n ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sowie m weitere ganze Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ so gewählt, dass $n > 0$ und $m > 0$ und $a_1 a_2 \cdots a_n = b_1 b_2 \cdots b_m$ gilt. Man zeige, dass man eine rechteckige Tabelle mit n Zeilen und m Spalten derart mit ganzen Zahlen füllen kann, dass folgendes gilt:
>
> - Das Produkt aller Zahlen in der i-ten Zeile ist a_i (für jedes $i \in [n]$).
> - Das Produkt aller Zahlen in der j-ten Spalte ist b_j (für jedes $j \in [m]$).

Diese Verallgemeinerung kann man mit einiger Arbeit aus Aufgabe 1 herleiten. Dazu muss man zuerst einmal den Fall aus dem Verkehr ziehen, dass das Produkt $a_1 a_2 \cdots a_n = b_1 b_2 \cdots b_m$ gleich 0 ist. (In diesem Fall sind mindestens ein a_i und ein b_j gleich 0. Fixieren wir solche i und j, dann können wir unsere Tabelle explizit füllen: In die i-te Zeile füllen wir die Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_m$, und in die j-te Spalte füllen wir die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. In jede der verbleibenden Zellen füllen wir eine 1. Es ist leicht einzusehen, dass die resultierende Tabelle den Bedingungen der Aufgabe genügt.) Es bleibt also nur noch der Fall zu lösen, wenn $a_1 a_2 \cdots a_n = b_1 b_2 \cdots b_m \neq 0$ ist. In diesem Fall kann man Aufgabe 1 auf $|a_i|$ und $|b_j|$ statt a_i und b_j anwenden, um eine Tabelle zu erhalten, die die Forderungen der Aufgabe 4 "bis auf die Vorzeichen" erfüllt. Das heißt, das Produkt aller Zahlen in der i-ten Zeile ist $|a_i|$ statt a_i, und das Produkt aller Zahlen in der j-ten Spalte ist $|b_j|$ statt b_j. Jetzt müssen wir nur noch an den Vorzeichen schrauben. Zunächst multiplizieren wir alle Einträge in der 1-ten Zeile mit ± 1-Faktoren, um den Spaltenprodukten ihre richtigen Vorzeichen zu geben (d.h., um zu erreichen, dass das Produkt aller Zahlen in der j-ten Spalte wirklich b_j ist). Dann multiplizieren wir alle Einträge in der 1-ten Spalte mit ± 1-Faktoren, um das gleiche für die Zeilenprodukte zu erreichen. Theoretisch könnte letzteres dazu führen, dass das 1-te Spaltenprodukt (d.h., das Produkt aller Einträge in der 1-ten Spalte) wieder das falsche Vorzeichen hat; jedoch würde dies der Bedingung $a_1 a_2 \cdots a_n = b_1 b_2 \cdots b_m \neq 0$ widersprechen (warum?). Somit erfüllt die resultierende Tabelle alle Forderungen der Aufgabe 4.

Man kann Aufgabe 4 noch weiter verallgemeinern, indem man ganze Zahlen durch Elemente eines ggT-Bereiches (d.h., eines Integritätsringes mit wohlgesitteter ggT-Funktion) ersetzt. Unsere zweite Lösung von Aufgabe 1 verallgemeinert sich ohne größere Schwierigkeiten auf diese Situation (während unsere erste Lösung nur für faktorielle Ringe funktioniert). Vorzeichen müssen natürlich durch Einheiten ersetzt werden.

2.2. zu Aufgabe 2

Erste Lösung zu Aufgabe 2: Wir führen zunächst einige Abkürzungen ein. Den Wert $f(i,j)$ der Funktion f an einer Stelle $(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bezeichnen wir kurz mit $f_{i,j}$. Wir haben angenommen, dass

$$f(i,j) = f(i+n,j) = f(i,j+m) \qquad \text{für alle } (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

gilt. Da wir jeden Funktionswert $f(i,j)$ mit $f_{i,j}$ abkürzen, können wir dies folgendermaßen umformulieren: Es gilt

$$f_{i,j} = f_{i+n,j} = f_{i,j+m} \qquad \text{für alle } (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Mit anderen Worten: Für alle $(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gilt

$$f_{i,j} = f_{i+n,j} \tag{10}$$

und

$$f_{i,j} = f_{i,j+m}. \tag{11}$$

Hieraus folgt unschwer, dass für jedes $j \in \mathbb{Z}$ die zwei Gleichungen

$$f_{n+1,j} = f_{1,j} \tag{12}$$

und

$$f_{0,j} = f_{n,j} \tag{13}$$

gelten[4]. Ein analoges Argument (aber mit Verwendung von (11) anstelle von (10)) zeigt, dass für jedes $i \in \mathbb{Z}$ die zwei Gleichungen

$$f_{i,m+1} = f_{i,1} \tag{14}$$

und

$$f_{i,0} = f_{i,m} \tag{15}$$

gelten.

Wir führen noch eine weitere Notation ein: Wenn $\mathcal{A}$ eine beliebige Aussage ist, dann soll $[\mathcal{A}]$ den Wahrheitswert von $\mathcal{A}$ (also die Zahl $\begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathcal{A} \text{ wahr ist;} \\ 0, & \text{wenn } \mathcal{A} \text{ falsch ist} \end{cases}$) bezeichnen. Beispielsweise ist $[2+2=4] = 1$ und $[2+2=5] = 0$.

Folgende Behauptung ist leicht einzusehen:

[4]*Beweis von (12) und (13):* Sei $j \in \mathbb{Z}$. Anwendung von (10) auf $i = 0$ ergibt $f_{0,j} = f_{0+n,j} = f_{n,j}$ (denn $0 + n = n$). Hieraus folgt (13). Ferner können wir (10) auf $i = 1$ anwenden, und erhalten dadurch $f_{1,j} = f_{1+n,j} = f_{n+1,j}$ (denn $1 + n = n + 1$). Daraus folgt wiederum (12). Damit haben wir beide Gleichungen (12) und (13) bewiesen.

Behauptung 1: Seien u, v und w drei Elemente von $\{0,1\}$. Dann ist

$$[u = v = w] = 1 - u - v - w + uv + uw + vw.$$

Beweis von Behauptung 1: Dies läßt sich maschinell nachprüfen, indem man alle 8 Möglichkeiten für die Werte von u, v und w durchprobiert. Der Ästhetik halber geben wir aber einen schöneren Beweis.

Zunächst stellen wir fest, dass

$$uvw + (1-u)(1-v)(1-w) = 1 - u - v - w + uv + uw + vw \tag{16}$$

ist. (Dies kann man durch Ausmultiplizieren der linken Seite nachprüfen.) Nun unterscheiden wir drei Fälle:

Fall 1: Wir haben $u = v = w$ und $u = 0$.

Fall 2: Wir haben $u = v = w$ und $u \neq 0$.

Fall 3: Wir haben **nicht** $u = v = w$.

Betrachten wir zunächst Fall 1. In diesem Fall gilt $u = v = w$ und $u = 0$. Somit sind alle drei Zahlen u, v und w gleich 0. Das Produkt uvw ist also 0, während das Produkt $(1-u)(1-v)(1-w)$ gleich 1 ist. Somit ist $\underbrace{uvw}_{=0} + \underbrace{(1-u)(1-v)(1-w)}_{=1} = 1$. Vergleichen wir dies mit (16), so erhalten wir $1 - u - v - w + uv + uw + vw = 1$. Andererseits ist $[u = v = w] = 1$ (da $u = v = w$ gilt). Vergleichen wir diese zwei Gleichungen, dann erhalten wir $[u = v = w] = 1 - u - v - w + uv + uw + vw$. Damit ist Behauptung 1 in Fall 1 bewiesen.

Betrachten wir nun Fall 2. In diesem Fall gilt $u = v = w$ und $u \neq 0$. Aus $u \neq 0$ folgt $u = 1$ (denn u ist ein Element von $\{0,1\}$). Somit sind alle drei Zahlen u, v und w gleich 1 (denn $u = v = w$). Das Produkt uvw ist also 1, während das Produkt $(1-u)(1-v)(1-w)$ gleich 0 ist. Somit ist $\underbrace{uvw}_{=1} + \underbrace{(1-u)(1-v)(1-w)}_{=0} = 1$. Hieraus können wir wie in Fall 1 die Gleichung $[u = v = w] = 1 - u - v - w + uv + uw + vw$ erhalten (denn $u = v = w$ gilt auch in diesem Fall). Damit ist Behauptung 1 in Fall 2 bewiesen.

Betrachten wir schließlich Fall 3. In diesem Fall gilt **nicht** $u = v = w$. Also ist $[u = v = w] = 0$.

Mindestens eine der drei Zahlen u, v und w ist von 0 verschieden (denn sonst hätten wir $u = v = w = 0$, und wären damit nicht in Fall 3), und muss daher gleich 1 sein (denn sie gehört zur Menge $\{0,1\}$, und kann daher nur die Werte 0 und 1 annehmen). Folglich ist mindestens eine der drei Zahlen $1-u$, $1-v$ und $1-w$ gleich $1-1=0$. Das Produkt $(1-u)(1-v)(1-w)$ hat also mindestens einen Faktor, der gleich 0 ist. Somit ist dieses Produkt 0. Wir haben also $(1-u)(1-v)(1-w) = 0$.

Mindestens eine der drei Zahlen u, v und w ist ferner von 1 verschieden (denn sonst hätten wir $u = v = w = 1$, und wären damit nicht in Fall 3), und muss daher gleich 0 sein (denn sie gehört zur Menge $\{0,1\}$, und kann daher nur die Werte 0 und 1 annehmen). Das Produkt uvw hat also mindestens einen Faktor, der gleich 0 ist. Somit ist dieses Produkt 0. Wir haben also $uvw = 0$.

Laut (16) ist nun

$$1 - u - v - w + uv + uw + vw = \underbrace{uvw}_{=0} + \underbrace{(1-u)(1-v)(1-w)}_{=0} = 0.$$

Vergleichen wir dies mit $[u = v = w] = 0$, so erhalten wir $[u = v = w] = 1 - u - v - w + uv + uw + vw$. Damit ist Behauptung 1 in Fall 3 bewiesen. Da somit alle Fälle abgedeckt sind, ist der Beweis von Behauptung 1 komplett. $\square$

Für jedes Paar $(i, j) \in [n] \times [m]$ gilt nun

$$\begin{aligned}
&[f(i,j) = f(i+1,j) = f(i,j+1)] \\
&= [f_{i,j} = f_{i+1,j} = f_{i,j+1}] \\
&\qquad\qquad \left(\text{denn wir haben die Abkürzung } f_{i,j} \text{ für } f(i,j) \text{ eingeführt}\right) \\
&= 1 - f_{i,j} - f_{i+1,j} - f_{i,j+1} + f_{i,j}f_{i+1,j} + f_{i,j}f_{i,j+1} + f_{i+1,j}f_{i,j+1} \qquad (17)
\end{aligned}$$

(nach Behauptung 1, angewandt auf $u = f_{i,j}$, $v = f_{i+1,j}$ und $w = f_{i,j+1}$ (denn $f_{i,j}$, $f_{i+1,j}$ und $f_{i,j+1}$ sind Werte der Funktion f, und daher Elemente von $\{0,1\}$)).

Jedoch erfüllt ein beliebiges Paar $(i, j) \in [n] \times [m]$ entweder die Bedingung $f(i,j) = f(i+1,j) = f(i,j+1)$ oder nicht. Deswegen können wir die Summe $\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} [f(i,j) = f(i+1,j) = f(i,j+1)]$ folgendermaßen aufspalten:

$$\begin{aligned}
&\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} [f(i,j) = f(i+1,j) = f(i,j+1)] \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in[n]\times[m];\\ f(i,j)=f(i+1,j)=f(i,j+1) \text{ gilt}}} \underbrace{[f(i,j) = f(i+1,j) = f(i,j+1)]}_{\substack{=1 \\ (\text{denn } f(i,j)=f(i+1,j)=f(i,j+1) \text{ gilt})}} \\
&\qquad + \sum_{\substack{(i,j)\in[n]\times[m];\\ f(i,j)=f(i+1,j)=f(i,j+1) \text{ gilt nicht}}} \underbrace{[f(i,j) = f(i+1,j) = f(i,j+1)]}_{\substack{=0 \\ (\text{denn } f(i,j)=f(i+1,j)=f(i,j+1) \text{ gilt nicht})}} \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in[n]\times[m];\\ f(i,j)=f(i+1,j)=f(i,j+1) \text{ gilt}}} 1 + \underbrace{\sum_{\substack{(i,j)\in[n]\times[m];\\ f(i,j)=f(i+1,j)=f(i,j+1) \text{ gilt nicht}}} 0}_{=0} = \sum_{\substack{(i,j)\in[n]\times[m];\\ f(i,j)=f(i+1,j)=f(i,j+1) \text{ gilt}}} 1 \\
&= \left(\text{die Anzahl aller } (i,j) \in [n] \times [m]\text{, die } f(i,j) = f(i+1,j) = f(i,j+1) \text{ erfüllen}\right) \cdot 1 \\
&= \left(\text{die Anzahl aller } (i,j) \in [n] \times [m]\text{, die } f(i,j) = f(i+1,j) = f(i,j+1) \text{ erfüllen}\right) \\
&= a
\end{aligned}$$

(denn a ist definiert als die Anzahl aller $(i, j) \in [n] \times [m]$, die $f(i,j) = f(i+1,j) =$

$f(i, j+1)$ erfüllen). Andererseits ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} \underbrace{[f(i,j) = f(i+1,j) = f(i,j+1)]}_{\substack{=1-f_{i,j}-f_{i+1,j}-f_{i,j+1}+f_{i,j}f_{i+1,j}+f_{i,j}f_{i,j+1}+f_{i+1,j}f_{i,j+1} \\ \text{(nach (17))}}} \\
&= \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} \left(1 - f_{i,j} - f_{i+1,j} - f_{i,j+1} + f_{i,j}f_{i+1,j} + f_{i,j}f_{i,j+1} + f_{i+1,j}f_{i,j+1}\right) \\
&= \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} (1 - f_{i,j}) - \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i+1,j} - \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j+1} + \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i+1,j} \\
&\qquad + \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i,j+1} + \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i+1,j}f_{i,j+1}.
\end{aligned}$$

Vergleichen wir diese zwei Gleichungen miteinander, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
a = &\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} (1 - f_{i,j}) - \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i+1,j} - \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j+1} + \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i+1,j} \\
&+ \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i,j+1} + \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i+1,j}f_{i,j+1}. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Ein analoges Argument (in dem aber alle Vorkommen von $i+1$, von $j+1$ und von a jeweils durch $i-1$, $j-1$ bzw. b ersetzt wurden) zeigt, dass ebenso

$$\begin{aligned}
b = &\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} (1 - f_{i,j}) - \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i-1,j} - \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j-1} + \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i-1,j} \\
&+ \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i,j-1} + \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i-1,j}f_{i,j-1} \qquad (19)
\end{aligned}$$

gilt.

Wir werden nun zeigen, dass jede der sechs Summen auf der rechten Seite von (18) mit der entsprechenden Summe auf der rechten Seite von (19) übereinstimmt. Wenn dies erst einmal gezeigt wird, wird $a = b$ folgen.

Wir zeigen zunächst die Gleichheit der jeweils zweiten Summen auf den rechten Seiten von (18) und (19) (die ersten Summen sind ja offensichtlich gleich):

Behauptung 2: Wir haben

$$\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i+1,j} = \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i-1,j}.$$

Beweis von Behauptung 2: Sei $j \in [m]$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f_{i+1,j} = f_{2,j} + f_{3,j} + \cdots + f_{n+1,j} &= \left(f_{2,j} + f_{3,j} + \cdots + f_{n,j}\right) + \underbrace{f_{n+1,j}}_{\substack{=f_{1,j} \\ \text{(nach (12))}}} \\
&= \left(f_{2,j} + f_{3,j} + \cdots + f_{n,j}\right) + f_{1,j} = f_{1,j} + \left(f_{2,j} + f_{3,j} + \cdots + f_{n,j}\right) \\
&= f_{1,j} + f_{2,j} + \cdots + f_{n,j}
\end{aligned}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i-1,j} = f_{0,j} + f_{1,j} + \cdots + f_{n-1,j} = \underbrace{f_{0,j}}_{\substack{=f_{n,j} \\ \text{(nach (13))}}} + \left(f_{1,j} + f_{2,j} + \cdots + f_{n-1,j}\right)$$
$$= f_{n,j} + \left(f_{1,j} + f_{2,j} + \cdots + f_{n-1,j}\right) = \left(f_{1,j} + f_{2,j} + \cdots + f_{n-1,j}\right) + f_{n,j}$$
$$= f_{1,j} + f_{2,j} + \cdots + f_{n,j}.$$

Diese zwei Gleichungen haben die gleiche rechte Seite; somit sind auch ihre linken Seiten gleich. Das heißt, wir haben $\sum\limits_{i=1}^{n} f_{i+1,j} = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{i-1,j}$.

Vergessen wir nun, dass wir j fixiert haben. Wir haben also gezeigt, dass

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i+1,j} = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1,j} \tag{20}$$

für jedes $j \in [m]$ gilt. Nun ist

$$\underbrace{\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]}}_{=\sum\limits_{j=1}^{m}\ \sum\limits_{i=1}^{n}} f_{i+1,j} = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{i+1,j}}_{\substack{=\sum\limits_{i=1}^{n} f_{i-1,j} \\ \text{(nach (20))}}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n}}_{=\sum\limits_{(i,j)\in[n]\times[m]}} f_{i-1,j} = \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i-1,j}.$$

Damit ist Behauptung 2 bewiesen. □

Analog können wir auch die dritten Summen in (18) und (19) vergleichen:

Behauptung 3: Wir haben

$$\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j+1} = \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j-1}.$$

Beweis von Behauptung 3: Behauptung 3 unterscheidet sich von Behauptung 2 dadurch, dass $f_{i+1,j}$ und $f_{i-1,j}$ durch $f_{i,j+1}$ bzw. $f_{i,j-1}$ ersetzt wurden – d.h., dass nicht das erste, sondern das zweite Argument in $f_{i,j}$ um 1 verändert wird. Da die zwei Argumente der Funktion f ähnliche Rollen spielen, ist der Beweis von Behauptung 3 auch analog zu obigem Beweis von Behauptung 2: Zunächst zeigen wir, dass $\sum\limits_{j=1}^{m} f_{i,j+1} = \sum\limits_{j=1}^{m} f_{i,j-1}$ für jedes $i \in [n]$ gilt (dies ist ein Analogon zu (20)); der Beweis hiervon ist analog zu unserem Beweis von (20), verwendet aber (14) und (15) anstelle von (12) bzw. (13). Dann leiten wir hieraus die erwünschte Gleichheit $\sum\limits_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j+1} = \sum\limits_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j-1}$ her, indem wir das Summationszeichen $\sum\limits_{(i,j)\in[n]\times[m]}$ in eine doppelte Summation $\sum\limits_{i=1}^{n}\ \sum\limits_{j=1}^{m}$ verwandeln. Die Details sind dem Leser überlassen.] □

Nun nehmen wir uns der vierten Summen in (18) und (19) an:

Behauptung 4: Wir haben

$$\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i+1,j} = \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i-1,j}.$$

Beweis von Behauptung 4: Sei $j \in [m]$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f_{i,j}f_{i+1,j} &= f_{1,j}f_{2,j} + f_{2,j}f_{3,j} + \cdots + f_{n,j}f_{n+1,j} \\
&= \left(f_{1,j}f_{2,j} + f_{2,j}f_{3,j} + \cdots + f_{n-1,j}f_{n,j}\right) + f_{n,j} \underbrace{f_{n+1,j}}_{\substack{=f_{1,j} \\ \text{(nach (12))}}} \\
&= \left(f_{1,j}f_{2,j} + f_{2,j}f_{3,j} + \cdots + f_{n-1,j}f_{n,j}\right) + f_{n,j}f_{1,j}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \underbrace{f_{i,j}f_{i-1,j}}_{=f_{i-1,j}f_{i,j}} &= \sum_{i=1}^{n} f_{i-1,j}f_{i,j} = f_{0,j}f_{1,j} + f_{1,j}f_{2,j} + \cdots + f_{n-1,j}f_{n,j} \\
&= \underbrace{f_{0,j}}_{\substack{=f_{n,j} \\ \text{(nach (13))}}} f_{1,j} + \left(f_{1,j}f_{2,j} + f_{2,j}f_{3,j} + \cdots + f_{n-1,j}f_{n,j}\right) \\
&= f_{n,j}f_{1,j} + \left(f_{1,j}f_{2,j} + f_{2,j}f_{3,j} + \cdots + f_{n-1,j}f_{n,j}\right) \\
&= \left(f_{1,j}f_{2,j} + f_{2,j}f_{3,j} + \cdots + f_{n-1,j}f_{n,j}\right) + f_{n,j}f_{1,j}.
\end{aligned}$$

Diese zwei Gleichungen haben die gleiche rechte Seite; somit sind auch ihre linken Seiten gleich. Das heißt, wir haben $\sum\limits_{i=1}^{n} f_{i,j}f_{i+1,j} = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{i,j}f_{i-1,j}$.

Vergessen wir nun, dass wir j fixiert haben. Wir haben also gezeigt, dass

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i,j}f_{i+1,j} = \sum_{i=1}^{n} f_{i,j}f_{i-1,j} \tag{21}$$

für jedes $j \in [m]$ gilt. Nun ist

$$\underbrace{\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]}}_{=\sum\limits_{j=1}^{m}\ \sum\limits_{i=1}^{n}} f_{i,j}f_{i+1,j} = \sum_{j=1}^{m}\ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{i,j}f_{i+1,j}}_{\substack{=\sum\limits_{i=1}^{n} f_{i,j}f_{i-1,j} \\ \text{(nach (21))}}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\ \sum_{i=1}^{n}}_{=\sum\limits_{(i,j)\in[n]\times[m]}} f_{i,j}f_{i-1,j} = \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i-1,j}.$$

Damit ist Behauptung 4 bewiesen. □

Ähnlich können wir mit den fünften Summen verfahren:

Behauptung 5: Wir haben

$$\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i,j+1} = \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i,j-1}.$$

Beweis von Behauptung 5: Dieser Beweis ist analog zu obigem Beweis von Behauptung 4: Zunächst zeigen wir, dass $\sum_{j=1}^{m} f_{i,j}f_{i,j+1} = \sum_{j=1}^{m} f_{i,j}f_{i,j-1}$ für jedes $i \in [n]$ gilt (dies ist ein Analogon zu (21)); der Beweis hiervon ist analog zu unserem Beweis von (21), verwendet aber (14) und (15) anstelle von (12) bzw. (13). Dann leiten wir hieraus die erwünschte Gleichheit $\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i,j+1} = \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i,j-1}$ her, indem wir das Summationszeichen $\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]}$ in eine doppelte Summation $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}$ verwandeln. Die Details sind dem Leser überlassen.] $\square$

Schließlich vergleichen wir die sechsten Summen in (18) und (19):

Behauptung 6: Wir haben

$$\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i+1,j}f_{i,j+1} = \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i-1,j}f_{i,j-1}.$$

Beweis von Behauptung 6: Wir setzen

$$g_{i,j} = f_{i+1,j}f_{i,j+1} \tag{22}$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$ und $j \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$g_{n,j} = g_{0,j} \tag{23}$$

für jedes $j \in \mathbb{Z}$ [5]. Analog können wir einsehen, dass

$$g_{i,m} = g_{i,0} \tag{24}$$

[5] *Beweis:* Sei $j \in \mathbb{Z}$. Laut Definition von $g_{n,j}$ gilt dann

$$g_{n,j} = \underbrace{f_{n+1,j}}_{\substack{=f_{1,j} \\ \text{(nach (12))}}} f_{n,j+1} = f_{1,j}f_{n,j+1}.$$

Doch nach der Definition von $g_{0,j}$ ist

$$g_{0,j} = \underbrace{f_{0+1,j}}_{=f_{1,j}} \underbrace{f_{0,j+1}}_{\substack{=f_{n,j+1} \\ \text{(nach (13), angewandt auf } j+1 \\ \text{statt } j)}} = f_{1,j}f_{n,j+1}.$$

Abgleichen dieser zwei Gleichungen ergibt $g_{n,j} = g_{0,j}$. Damit ist (23) bewiesen.

für jedes $i \in \mathbb{Z}$ gilt.

Für jedes $j \in \mathbb{Z}$ gilt nun

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} g_{i,j} &= g_{1,j} + g_{2,j} + \cdots + g_{n,j} = \left(g_{1,j} + g_{2,j} + \cdots + g_{n-1,j}\right) + \underbrace{g_{n,j}}_{\substack{=g_{0,j} \\ \text{(nach (23))}}} \\
&= \left(g_{1,j} + g_{2,j} + \cdots + g_{n-1,j}\right) + g_{0,j} = g_{0,j} + \left(g_{1,j} + g_{2,j} + \cdots + g_{n-1,j}\right) \\
&= g_{0,j} + g_{1,j} + \cdots + g_{n-1,j} = \sum_{i=1}^{n} g_{i-1,j}. \qquad (25)
\end{aligned}$$

Für jedes $i \in \mathbb{Z}$ gilt andererseits

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} g_{i,j} &= g_{i,1} + g_{i,2} + \cdots + g_{i,m} = \left(g_{i,1} + g_{i,2} + \cdots + g_{i,m-1}\right) + \underbrace{g_{i,m}}_{\substack{=g_{i,0} \\ \text{(nach (24))}}} \\
&= \left(g_{i,1} + g_{i,2} + \cdots + g_{i,m-1}\right) + g_{i,0} = g_{i,0} + \left(g_{i,1} + g_{i,2} + \cdots + g_{i,m-1}\right) \\
&= g_{i,0} + g_{i,1} + \cdots + g_{i,m-1} = \sum_{j=1}^{m} g_{i,j-1}. \qquad (26)
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]}}_{=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}} \underbrace{f_{i+1,j} f_{i,j+1}}_{\substack{=g_{i,j} \\ \text{(laut (22))}}} &= \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} g_{i,j}}_{\substack{=\sum_{i=1}^{n} g_{i-1,j} \\ \text{(nach (25))}}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n}}_{=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}} g_{i-1,j} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{m} g_{i-1,j}}_{\substack{=\sum_{j=1}^{m} g_{i-1,j-1} \\ \text{(nach (26), angewandt} \\ \text{auf } i-1 \text{ statt } i)}} \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m}}_{=\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]}} \underbrace{g_{i-1,j-1}}_{\substack{=f_{(i-1)+1,j-1} f_{i-1,(j-1)+1} \\ \text{(nach (22), angewandt} \\ \text{auf } i-1 \text{ und } j-1 \text{ statt } i \text{ und } j)}} \\
&= \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} \underbrace{f_{(i-1)+1,j-1}}_{=f_{i,j-1}} \underbrace{f_{i-1,(j-1)+1}}_{=f_{i-1,j}} = \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} \underbrace{f_{i,j-1} f_{i-1,j}}_{=f_{i-1,j} f_{i,j-1}} \\
&= \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i-1,j} f_{i,j-1}.
\end{aligned}$$

Damit ist Behauptung 6 bewiesen. □

Wir sind nun fast fertig: Aus (18) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
a &= \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} (1-f_{i,j}) - \underbrace{\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i+1,j}}_{\substack{=\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i-1,j} \\ \text{(nach Behauptung 2)}}} - \underbrace{\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j+1}}_{\substack{=\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j-1} \\ \text{(nach Behauptung 3)}}} + \underbrace{\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i+1,j}}_{\substack{=\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i-1,j} \\ \text{(nach Behauptung 4)}}} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i,j+1}}_{\substack{=\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i,j-1} \\ \text{(nach Behauptung 5)}}} + \underbrace{\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i+1,j}f_{i,j+1}}_{\substack{=\sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i-1,j}f_{i,j-1} \\ \text{(nach Behauptung 6)}}} \\
&= \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} (1-f_{i,j}) - \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i-1,j} - \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j-1} + \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i-1,j} \\
&\quad + \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i,j}f_{i,j-1} + \sum_{(i,j)\in[n]\times[m]} f_{i-1,j}f_{i,j-1} \\
&= b \qquad \text{(laut (19))}.
\end{aligned}
$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. □

Bemerkung 2.9. In der obigen Lösung hätten wir uns viel Arbeit sparen können, wenn wir bemerkt hätten, dass die Funktion f über den "$n \times m$-Torus" $(\mathbb{Z}/n) \times (\mathbb{Z}/m)$ faktorisiert, wobei $\mathbb{Z}/k$ die Menge der Restklassen ganzer Zahlen modulo k bezeichnet. Ich wollte aber ohne diese Abkürzung auskommen.

Es sei ferner bemerkt, dass in allen Summen, die in der obigen Lösung vorkamen, jeder Summand entweder 0 oder 1 war. Somit hätten wir statt von Summen auch von Anzahlen sprechen könnten. Dies haben wir allerdings vermieden, da das Summenzeichen flexibler und einfacher zu bedienen ist.

Zweite Lösung zu Aufgabe 2 (skizziert): Laut Annahme gilt

$$f(i,j) = f(i+n,j) = f(i,j+m) \qquad \text{für alle } (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Mit anderen Worten: Die Funktion f ist als Funktion des ersten Argumentes periodisch mit Periode n (wenn man das zweite Argument fest läßt), und ist als Funktion des zweiten Argumentes periodisch mit Periode m (wenn man das erste Argument fest läßt). Hieraus folgt z. B., dass $f(0,j) = f(n,j)$ und $f(n+1,j) = f(1,j)$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ gilt.

Wir führen eine abkürzende Notation ein: Wenn $\mathcal{A}(i,j)$ eine Aussage über ein Zahlenpaar $(i,j) \in [n] \times [m]$ ist, dann bezeichnen wir mit

$$\#(\mathcal{A}(i,j))$$

die Anzahl aller Zahlenpaare $(i,j) \in [n] \times [m]$, welche diese Aussage $\mathcal{A}(i,j)$ erfüllen. So ist beispielsweise $\#(f(i,j)=0)$ die Anzahl aller Zahlenpaare $(i,j) \in [n] \times [m]$, welche $f(i,j)=0$ erfüllen.

Die Definition von a besagt also, dass

$$a = \#\left(f\left(i,j\right) = f\left(i+1,j\right) = f\left(i,j+1\right)\right)$$

gilt. Die Definition von b besagt indessen, dass

$$b = \#\left(f\left(i,j\right) = f\left(i-1,j\right) = f\left(i,j-1\right)\right)$$

gilt.

Wir setzen ferner

$$\begin{aligned}
a_1 &= \#\left(f\left(i,j\right) = f\left(i+1,j\right)\right); \\
a_2 &= \#\left(f\left(i,j\right) = f\left(i,j+1\right)\right); \\
b_1 &= \#\left(f\left(i,j\right) = f\left(i-1,j\right)\right); \\
b_2 &= \#\left(f\left(i,j\right) = f\left(i,j-1\right)\right); \\
c &= \#\left(f\left(i+1,j\right) \neq f\left(i,j+1\right)\right); \\
d &= \#\left(f\left(i-1,j\right) \neq f\left(i,j-1\right)\right).
\end{aligned}$$

Wir werden nun zeigen, dass $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$ und $c = d$ und $2a = a_1 + a_2 - c$ und $2b = b_1 + b_2 - d$ gilt. Aus diesen fünf Gleichungen wird dann schnell folgen, dass $a = b$ ist.

Beweis von $a_1 = b_1$: Es gibt eine Bijektion zwischen den Mengen

$$\begin{aligned}
&\left\{(i,j) \in [n] \times [m] \;\mid\; f\left(i,j\right) = f\left(i+1,j\right)\right\} \\
\text{und } &\left\{(i,j) \in [n] \times [m] \;\mid\; f\left(i,j\right) = f\left(i-1,j\right)\right\}
\end{aligned}$$

– und zwar die Abbildung, die jedes (i,j) in $(i+1,j)$ überführt, wobei $i+1$ "modulo n" zu verstehen ist (d.h., wenn $i = n$ ist, dann ist $i+1$ als 1 zu deuten)[6]. Daher sind diese zwei Mengen gleich groß. Das heißt, $\#\left(f\left(i,j\right) = f\left(i+1,j\right)\right) = \#\left(f\left(i,j\right) = f\left(i-1,j\right)\right)$. Mit anderen Worten: $a_1 = b_1$ (denn wir haben die Zahlen $\#\left(f\left(i,j\right) = f\left(i+1,j\right)\right)$ und $\#\left(f\left(i,j\right) = f\left(i-1,j\right)\right)$ mit a_1 bzw. b_1 bezeichnet). Damit ist $a_1 = b_1$ beweisen. □

Beweis von $a_2 = b_2$: Der Beweis von $a_2 = b_2$ ist analog zum Beweis von $a_1 = b_1$, mit dem Unterschied, dass unsere Bijektion (i,j) nicht in $(i+1,j)$ sondern in $(i,j+1)$ überführt (wobei $j+1$ "modulo m" zu verstehen ist). □

Beweis von $c = d$: Der Beweis von $c = d$ ist analog zum Beweis von $a_1 = b_1$, mit dem Unterschied, dass unsere Bijektion (i,j) nicht in $(i+1,j)$ sondern in $(i+1,j+1)$ überführt (wobei $i+1$ "modulo n" und $j+1$ "modulo m" zu verstehen sind). □

[6] Hier verwenden wir, dass f als Funktion des ersten Argumentes periodisch mit Periode n ist (sodaß wir im ersten Argument nicht zwischen 1 und $n+1$ unterscheiden müssen).

Beweis von $2a = a_1 + a_2 - c$: Wir setzen

$$c_1 = \#\left(f(i,j) = f(i+1,j) \neq f(i,j+1)\right);$$
$$c_2 = \#\left(f(i,j) = f(i,j+1) \neq f(i+1,j)\right).$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
a_1 &= \#\left(f(i,j) = f(i+1,j)\right) \\
&= \underbrace{\#\left(f(i,j) = f(i+1,j) = f(i,j+1)\right)}_{=a} + \underbrace{\#\left(f(i,j) = f(i+1,j) \neq f(i,j+1)\right)}_{=c_1} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn jedes Zahlenpaar } (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ mit } f(i,j) = f(i+1,j) \\ \text{erfüllt entweder } f(i,j) = f(i+1,j) = f(i,j+1) \\ \text{oder } f(i,j) = f(i+1,j) \neq f(i,j+1) \text{ (aber} \\ \text{nicht beides gleichzeitig)}\end{array}\right) \\
&= a + c_1,
\end{aligned}$$

also $a = a_1 - c_1$. Analog erhalten wir $a = a_2 - c_2$. Addieren wir diese beiden Gleichungen zusammen, so erhalten wir $2a = (a_1 - c_1) + (a_2 - c_2)$.

Andererseits wollen wir beweisen, dass $c_1 + c_2 = c$ gilt.

Dazu betrachten wir ein beliebiges Zahlenpaar $(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $f(i+1,j) \neq f(i,j+1)$. Dann sind die zwei Zahlen $f(i+1,j)$ und $f(i,j+1)$ voneinander verschieden. Da diese beiden Zahlen zur zweielementigen Menge $\{0,1\}$ gehören, muss also eine von ihnen gleich 0 und die andere gleich 1 sein. Die Zahl $f(i,j)$ (die ebenfalls zu dieser Menge $\{0,1\}$ gehört) muss also entweder gleich $f(i+1,j)$ oder gleich $f(i,j+1)$ sein. Das heißt, es gilt entweder $f(i,j) = f(i+1,j) \neq f(i,j+1)$ oder $f(i,j) = f(i,j+1) \neq f(i+1,j)$ (und es ist unmöglich, dass beides gleichzeitig gilt, denn im ersten Fall gilt $f(i,j) \neq f(i,j+1)$ und im zweiten $f(i,j) = f(i,j+1)$).

Vergessen wir nun, dass wir (i,j) fixiert haben. Wir haben also folgendes gezeigt: Für jedes Zahlenpaar $(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $f(i+1,j) \neq f(i,j+1)$ gilt entweder $f(i,j) = f(i+1,j) \neq f(i,j+1)$ oder $f(i,j) = f(i,j+1) \neq f(i+1,j)$, aber nicht beides gleichzeitig. Somit gilt

$$\begin{aligned}
&\#\left(f(i+1,j) \neq f(i,j+1)\right) \\
&\quad = \underbrace{\#\left(f(i,j) = f(i+1,j) \neq f(i,j+1)\right)}_{=c_1} + \underbrace{\#\left(f(i,j) = f(i,j+1) \neq f(i+1,j)\right)}_{=c_2} \\
&\quad = c_1 + c_2,
\end{aligned}$$

also

$$c_1 + c_2 = \#\left(f(i+1,j) \neq f(i,j+1)\right) = c.$$

Weiter oben haben wir aber $2a = (a_1 - c_1) + (a_2 - c_2)$ bewiesen. Somit gilt

$$2a = (a_1 - c_1) + (a_2 - c_2) = a_1 + a_2 - \underbrace{(c_1 + c_2)}_{=c} = a_1 + a_2 - c.$$

Damit ist $2a = a_1 + a_2 - c$ gezeigt. □

Beweis von $2b = b_1 + b_2 - d$: Der Beweis von $2b = b_1 + b_2 - d$ ist analog zum Beweis von $2a = a_1 + a_2 - c$. (Diesmal sind aber $i - 1$ und $j - 1$ statt $i + 1$ und $j + 1$ im Spiel.) □

Nun sind wir fast fertig: Aus unseren oben bewiesenen Gleichheiten folgt

$$2a = \underbrace{a_1}_{=b_1} + \underbrace{a_2}_{=b_2} - \underbrace{c}_{=d} = b_1 + b_2 - d = 2b.$$

Daher ist $a = b$, und die Aufgabe somit erneut gelöst. □

Bemerkung 2.10. Eine weitere (dritte) Lösung von Aufgabe 2 läßt sich erhalten, indem man "dynamisch" vorgeht: Zunächst zeigt man, dass die Gleichheit $a = b$ für die Nullfunktion gilt (d.h., wenn $f(i,j) = 0$ für alle $(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gilt). Dann ersetzt man schrittweise gewisse Werte von f durch 1 (wobei man natürlich die Periodizitätsbedingung erhalten muss: d.h., wenn man $f(i,j)$ durch 1 ersetzt, dann muss man auch alle Werte der Form $f(i + kn, j + \ell m)$ mit $k, \ell \in \mathbb{Z}$ durch 1 ersetzen). Man muss zeigen, dass bei jeder solchen Ersetzung a und b sich um den gleichen Wert verändern. Dies läßt sich durch eine sehr umständliche aber endliche Fallunterscheidung erledigen, die z. B. ein Computer schnell erledigen kann. Alternativ (und schöner) kann man die Veränderungen von a und b durch Polynome in den neun Werten $f(i + \alpha,\ j + \beta)$ mit $\alpha, \beta \in \{-1, 0, 1\}$ ausdrücken, und dann rechnerisch zeigen dass die beiden Polynome gleich sind.

Bemerkung 2.11. Aufgabe 2 ist inspiriert von [Netzer17]. Nämlich wird in [Netzer17, proof of Theorem 3.4] implizit folgendes gezeigt:

Satz 2.12. Sei n eine natürliche Zahl. Für jede Permutation σ von $\{1, 2, \ldots, n\}$ sei $\operatorname{Inv}\sigma$ die Menge aller Paare $(i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$, die $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ erfüllen. (Solche Paare heißen *Inversionen* von σ.) Seien α und β zwei Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$, die $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ erfüllen. Dann ist

$$|(\operatorname{Inv}\alpha) \cap (\operatorname{Inv}\beta)| = \left|\left(\operatorname{Inv}\left(\alpha^{-1}\right)\right) \cap \left(\operatorname{Inv}\left(\beta^{-1}\right)\right)\right|.$$

Der genaue Zusammenhang zwischen diesem Satz und Aufgabe 2 ist komplizierter als der Beweis des Satzes, weshalb ich hier nicht genauer auf ihn eingehe.

Bemerkung 2.13. Eine rein bijektive Lösung von Aufgabe 2 (ohne Subtraktion und Division durch 2) ist mir nicht bekannt.

Bemerkung 2.14. Es ist wichtig, dass die Funktion f in Aufgabe 2 in eine zweielementige Menge geht. Schon mit einer dreielementigen Menge wäre die Aufgabe falsch. Man kann für beliebige $n \geq 3$ und $m \geq 2$ eine Funktion

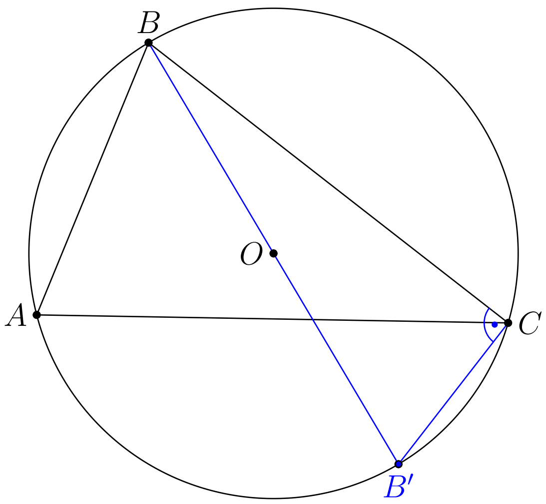

Fig. 2: zu Lemma 2.15

$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \{0,1,2\}$ so konstruieren, dass $a \neq b$ gilt (wobei a und b wie in der Aufgabe definiert sind).

2.3. zu Aufgabe 3

Erste Lösung zu Aufgabe 3 (nach einer Idee von Juri Kaganskiy): Wir verwenden im Folgenden orientierte Winkel modulo 180°; eine Einführung in diese Art von Winkeln findet sich (u.a.) in [Grinbe04]. Wir erinnern uns an eine wichtige Eigenschaft solcher Winkel: Für beliebige drei Geraden g, h und k gilt

$$\measuredangle(g;\ k) = \measuredangle(g;\ h) + \measuredangle(h;\ k)\,. \tag{27}$$

Wir werden folgendes Lemma verwenden:

Lemma 2.15 (Mittelpunktswinkelsatz für orientierte Winkel modulo 180°)**.** Sei O der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC. Dann gilt $\measuredangle OBC = 90° - \measuredangle CAB$.

Dieses Lemma ist wohlbekannt, aber der Vollständigkeit halber geben wir einen Beweis:

Beweis von Lemma 2.15: (Siehe Fig. 2.) Sei B' der Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC, der dem Punkt B diametral gegenüberliegt. Dann ist die Strecke BB' ein Durchmesser dieses Umkreises, und geht daher durch den Mittelpunkt O dieses Umkreises. Folglich ist $\measuredangle OBC = \measuredangle B'BC$. Ferner gilt $\measuredangle BB'C = \measuredangle BAC$ nach dem Umfangswinkelsatz (denn der Punkt B' liegt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC). Doch der Kreis mit dem Durchmesser BB' ist der Umkreis des Dreiecks ABC (denn BB' ist ja ein Durchmesser dieses Umkreises), und geht somit durch C.

Somit gilt $\measuredangle BCB' = 90°$ nach dem Satz von Thales. Also ist $BC \perp CB'$ und damit $\measuredangle B'CB = 90°$. Nun ist

$$\begin{aligned}\measuredangle OBC &= \measuredangle B'BC = \measuredangle\left(BB';\ BC\right)\\ &= \underbrace{\measuredangle\left(BB';\ B'C\right)}_{=\measuredangle BB'C=\measuredangle BAC=-\measuredangle CAB} + \underbrace{\measuredangle\left(B'C;\ BC\right)}_{=\measuredangle B'CB=90°} \qquad \text{(nach (27))}\\ &= -\measuredangle CAB + 90° = 90° - \measuredangle CAB.\end{aligned}$$

Damit ist Lemma 2.15 bewiesen. □

Wir benötigen ferner ein weiteres Lemma:

Lemma 2.16. Sei ABC ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. Sei P ein beliebiger Punkt in der Ebene. Seien Q und R die Spiegelbilder von P an den Geraden CA bzw. AB. Dann gilt:

(a) Das Dreieck AQR ist gegensinnig ähnlich zum Dreieck OBC (wobei die Ecken A, Q und R des ersteren genau den Ecken O, B bzw. C des letzteren entsprechen). (Siehe Fig. 3.)

(b) Es gilt $\measuredangle\left(QR;\ CA\right) = 90° - \measuredangle\left(AP;\ AB\right)$.

Hierbei wird nicht gefordert, dass $AP \perp BC$ gilt; dies wird erst später in der Lösung notwendig.

Beweis von Lemma 2.16: Wir nehmen o. B. d. A. an, dass die Punkte P, Q und R paarweise verschieden sind.[7]

Wir nehmen ferner o. B. d. A. an, dass $\measuredangle CAB \neq 90°$ gilt[8]. Nach Lemma 2.15 ist jedoch

$$\measuredangle OBC = 90° - \measuredangle CAB. \qquad (28)$$

Somit ist $\measuredangle OBC = 90° - \underbrace{\measuredangle CAB}_{\neq 90°} \neq 90° - 90° = 0°$. Also liegen die Punkte O, B und C nicht auf einer Geraden. Das heißt, das Dreieck OBC ist nicht-entartet.

Der Punkt Q ist das Spiegelbild von P an der Geraden CA. Aus Symmetriegründen gilt somit $|AQ| = |AP|$ (denn der Punkt A liegt auf dieser Geraden CA). Analog gilt $|AR| = |AP|$. Der Kreis um A mit Radius $|AP|$ geht durch die Punkte P, Q und R (denn $|AP| = |AP|$ und $|AQ| = |AP|$ und $|AR| = |AP|$), und ist somit der Umkreis des Dreiecks PQR (denn die Punkte P, Q und R sind paarweise verschieden). Sein Mittelpunkt A ist also der Umkreismittelpunkt des Dreiecks

[7] Denn die Fälle, in denen sie nicht paarweise verschieden sind, können als Grenzfälle betrachtet werden.

[8] Der Fall, in dem $\measuredangle CAB = 90°$ gilt, kann nämlich auch als Grenzfall betrachtet werden.

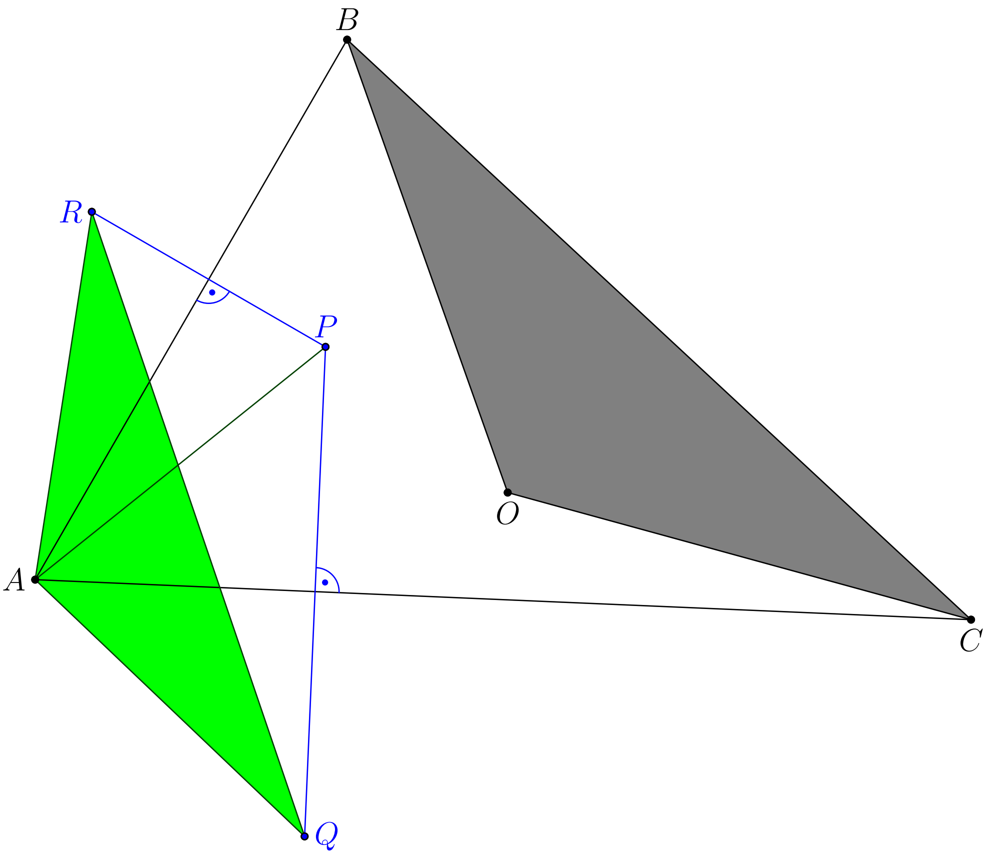

Fig. 3: zu Lemma 2.16

PQR. Lemma 2.15 (angewendet auf das Dreieck PQR und den Punkt A anstelle des Dreiecks ABC und des Punktes O) ergibt also

$$\measuredangle AQR = 90^\circ - \measuredangle RPQ. \tag{29}$$

Doch da Q das Spiegelbild von P an der Geraden CA ist, gilt $PQ \perp CA$. Analog ist $PR \perp AB$. Nun ist

$$\begin{aligned}
\measuredangle RPQ &= \measuredangle(PR;\ PQ) = \underbrace{\measuredangle(PR;\ AB)}_{\substack{=90^\circ \\ \text{(denn } PR\perp AB)}} + \underbrace{\measuredangle(AB;\ PQ)}_{=-\measuredangle(PQ;\ AB)} \qquad \text{(nach (27))} \\
&= 90^\circ + (-\measuredangle(PQ;\ AB)) = 90^\circ - \underbrace{\measuredangle(PQ;\ AB)}_{\substack{=\measuredangle(PQ;\ CA)+\measuredangle(CA;\ AB) \\ \text{(nach (27))}}} \\
&= 90^\circ - (\measuredangle(PQ;\ CA) + \measuredangle(CA;\ AB)) = 90^\circ - \underbrace{\measuredangle(PQ;\ CA)}_{\substack{=90^\circ \\ \text{(denn } PQ\perp CA)}} - \underbrace{\measuredangle(CA;\ AB)}_{=\measuredangle CAB} \\
&= 90^\circ - 90^\circ - \measuredangle CAB = -\measuredangle CAB.
\end{aligned}$$

Doch da wir mit Winkeln modulo 180° arbeiten, ist $90^\circ = -90^\circ$. Aus (29) wird also

$$\begin{aligned}
\measuredangle AQR &= \underbrace{90^\circ}_{=-90^\circ} - \underbrace{\measuredangle RPQ}_{=-\measuredangle CAB} = (-90)^\circ - (-\measuredangle CAB) \\
&= -\underbrace{(90^\circ - \measuredangle CAB)}_{\substack{=\measuredangle OBC \\ \text{(nach (28))}}} = -\measuredangle OBC.
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich $\measuredangle ARQ = -\measuredangle OCB$. Aus diesen zwei Gleichungen folgt nach dem ww-Ähnlichkeitskriterium, dass das Dreieck AQR zum Dreieck OBC gegensinnig ähnlich ist (denn das Dreieck OBC ist nicht-entartet). Damit ist Lemma 2.16 **(a)** bewiesen.

(b) Der Punkt O ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC und damit auch der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ACB. Lemma 2.15 (angewendet auf das Dreieck ACB anstelle des Dreiecks ABC) ergibt also $\measuredangle OCB = 90^\circ - \measuredangle BAC$.

Der Punkt Q ist das Spiegelbild von P an der Geraden CA. Aus Symmetriegründen gilt somit $\measuredangle QAC = -\measuredangle PAC$ (denn die Punkte A und C liegen auf dieser Geraden CA). Analog erhalten wir $\measuredangle RAB = -\measuredangle PAB$.

Wir haben oben gesehen, dass $\measuredangle ARQ = -\measuredangle OCB$ ist. Also ist $-\measuredangle ARQ = \measuredangle OCB$. Nun ist

$$\begin{aligned}
\measuredangle(QR;\ CA) &= \underbrace{\measuredangle(QR;\ AR)}_{=\measuredangle QRA=-\measuredangle ARQ=\measuredangle OCB} + \underbrace{\measuredangle(AR;\ CA)}_{\substack{=\measuredangle RAC \\ =\measuredangle RAB+\measuredangle BAC}} \qquad \text{(nach (27))} \\
&= \underbrace{\measuredangle OCB}_{=90^\circ-\measuredangle BAC} + \underbrace{\measuredangle RAB}_{=-\measuredangle PAB} + \measuredangle BAC = 90^\circ - \measuredangle BAC + (-\measuredangle PAB) + \measuredangle BAC \\
&= 90^\circ - \underbrace{\measuredangle PAB}_{=\measuredangle(AP;\ AB)} = 90^\circ - \measuredangle(AP;\ AB).
\end{aligned}$$

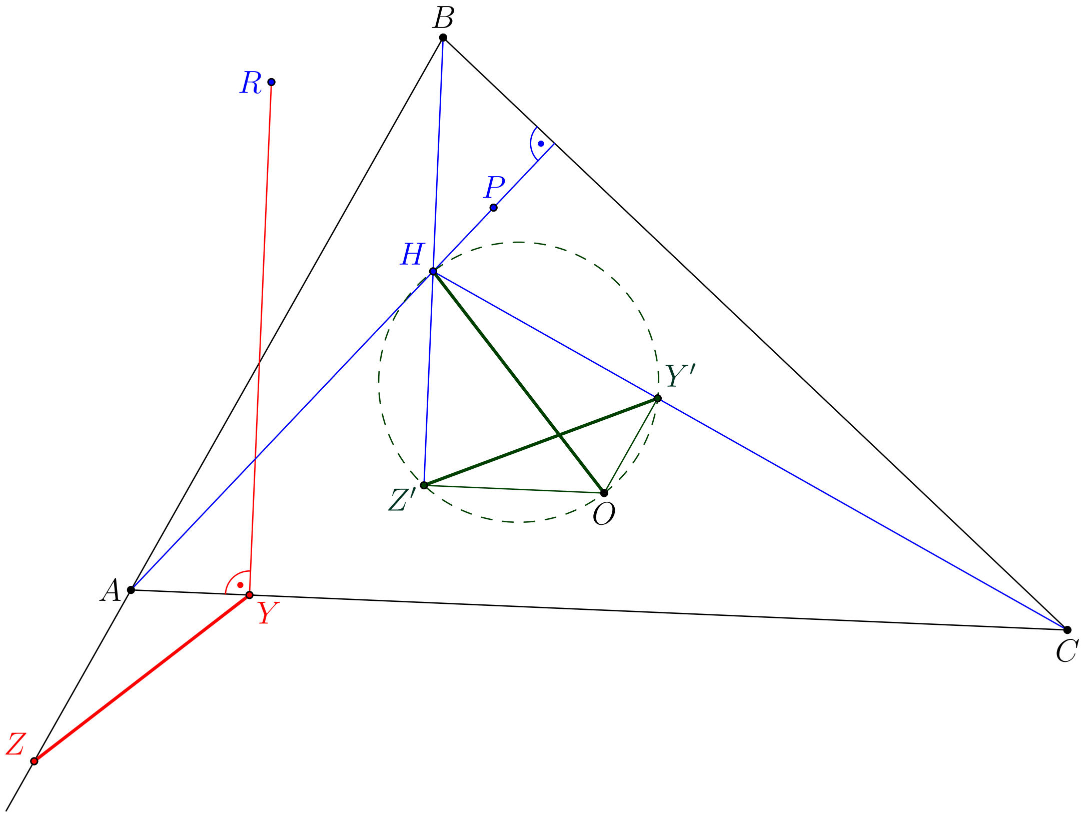

Fig. 4: zur ersten Lösung von Aufgabe 3

Damit ist Lemma 2.16 **(b)** bewiesen. □

Nun kommen wir zur Lösung von Aufgabe 3. Seien also ABC, H, O, P, Q, R, Y und Z wie in Aufgabe 3.

Der Punkt Y ist definiert als der Fußpunkt des Lotes von R auf die Gerade CA. Also ist RY dieses Lot. Wir haben daher $RY \perp CA$.

Der Punkt H ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. Also ist CH die von C ausgehende Höhe dieses Dreiecks. Somit gilt $CH \perp AB$. Analog gilt $BH \perp CA$.

Laut Lemma 2.16 ist das Dreieck AQR gegensinnig ähnlich zum Dreieck OBC. Folglich gibt es eine gegensinnige Ähnlichkeitsabbildung $ä$, die das Dreieck AQR in das Dreieck OBC überführt (also die Punkte A, Q und R jeweils nach O, B bzw. C abbildet). Betrachten wir diese Abbildung $ä$. Seien Y' und Z' die Bilder der Punkte Y bzw. Z unter dieser Abbildung $ä$. Das heißt, $Y' = ä(Y)$ und $Z' = ä(Z)$.

(Siehe Fig. 4.) Nun ist $ä$ eine gegensinnige Ähnlichkeitsabbildung. Folglich läßt sie orientierte Winkel bis aufs Vorzeichen unverändert, kehrt dabei aber ihr Vorzeichen um. Somit muss $\measuredangle BCY' = -\measuredangle QRY$ sein (denn $ä$ bildet die Punkte Q, R und Y auf die Punkte B, C bzw. Y' ab). Aus demselben Grund gilt $\measuredangle OY'C = -\measuredangle AYR$ (denn $ä$ bildet die Punkte A, Y und R auf die Punkte O, Y' bzw. C ab) und $\measuredangle OY'Z' = -\measuredangle AYZ$ (denn $ä$ bildet die Punkte A, Y und Z auf die Punkte O, Y' bzw. Z' ab).

Nun haben wir

$$\begin{aligned}
\measuredangle BCY' &= -\measuredangle QRY = \measuredangle YRQ = \measuredangle(RY;\ QR)\\
&= \underbrace{\measuredangle(RY;\ CA)}_{\substack{=90^\circ\\ \text{(denn } RY\perp CA)}} + \underbrace{\measuredangle(CA;\ QR)}_{=-\measuredangle(QR;\ CA)} \qquad \text{(nach (27))}\\
&= 90^\circ + (-\measuredangle(QR;\ CA)) = 90^\circ - \underbrace{\measuredangle(QR;\ CA)}_{\substack{=90^\circ-\measuredangle(AP;\ AB)\\ \text{(nach Lemma 2.16 \textbf{(b)})}}}\\
&= 90^\circ - (90^\circ - \measuredangle(AP;\ AB)) = \measuredangle(AP;\ AB)\\
&= \underbrace{\measuredangle(AP;\ BC)}_{\substack{=90^\circ\\ \text{(denn } AP\perp BC)}} + \underbrace{\measuredangle(BC;\ AB)}_{\substack{=\measuredangle(BC;\ CH)+\measuredangle(CH;\ AB)\\ \text{(nach (27))}}} \qquad \text{(nach (27))}\\
&= 90^\circ + \underbrace{\measuredangle(BC;\ CH)}_{=\measuredangle BCH} + \underbrace{\measuredangle(CH;\ AB)}_{\substack{=90^\circ\\ \text{(denn } CH\perp AB)}} = 90^\circ + \measuredangle BCH + 90^\circ = 180^\circ + \measuredangle BCH
\end{aligned}$$

und damit

$$\measuredangle BCY' - \measuredangle BCH = 180^\circ = 0^\circ$$

(denn wir arbeiten mit Winkeln modulo 180°). Wir haben also $\measuredangle HCY' = \measuredangle BCY' - \measuredangle BCH = 0^\circ$. Also liegen die Punkte C, H und Y' auf einer Geraden. Das heißt, der Punkt Y' liegt auf der Geraden CH. Analog liegt der Punkt Z' auf der Geraden BH.

Jedoch haben wir $\measuredangle OY'C = -\measuredangle AYR$ gezeigt. Also ist

$$\begin{aligned}
\measuredangle OY'C &= -\measuredangle AYR = \measuredangle RYA = \measuredangle(RY;\ CA) \qquad \text{(denn } Y \text{ liegt auf der Geraden } CA)\\
&= 90^\circ \qquad (\text{denn } RY \perp CA)\,.
\end{aligned}$$

Da der Punkt Y' auf der Geraden CH liegt, ist aber $\measuredangle OY'H = \measuredangle OY'C = 90^\circ$. Analog gilt $\measuredangle OZ'H = 90^\circ$. Wegen diesen zwei Gleichungen liegen die Punkte Y' und Z' auf dem Thaleskreis über der Strecke OH. Somit liegen die vier Punkte O, H, Y' und Z' auf einem Kreis (nämlich auf diesem Thaleskreis). Nach dem Umfangswinkelsatz gilt also

$$\measuredangle OY'Z' = \measuredangle OHZ' = \measuredangle OHB$$

(denn der Punkt Z' liegt auf der Geraden BH). Wie wir aber bereits wissen, gilt

$$\measuredangle OY'Z' = -\measuredangle AYZ = \measuredangle ZYA = \measuredangle(YZ;\ CA)$$

(denn der Punkt Y liegt auf der Geraden CA). Also ist

$$\begin{aligned}
\measuredangle(YZ;\ CA) &= \measuredangle OY'Z' = \measuredangle OHB = \measuredangle(HO;\ BH)\\
&= \measuredangle(HO;\ CA) + \underbrace{\measuredangle(CA;\ BH)}_{\substack{=90^\circ\\ \text{(denn } BH\perp CA)}} \qquad \text{(nach (27))}\\
&= \measuredangle(HO;\ CA) + 90^\circ.
\end{aligned}$$

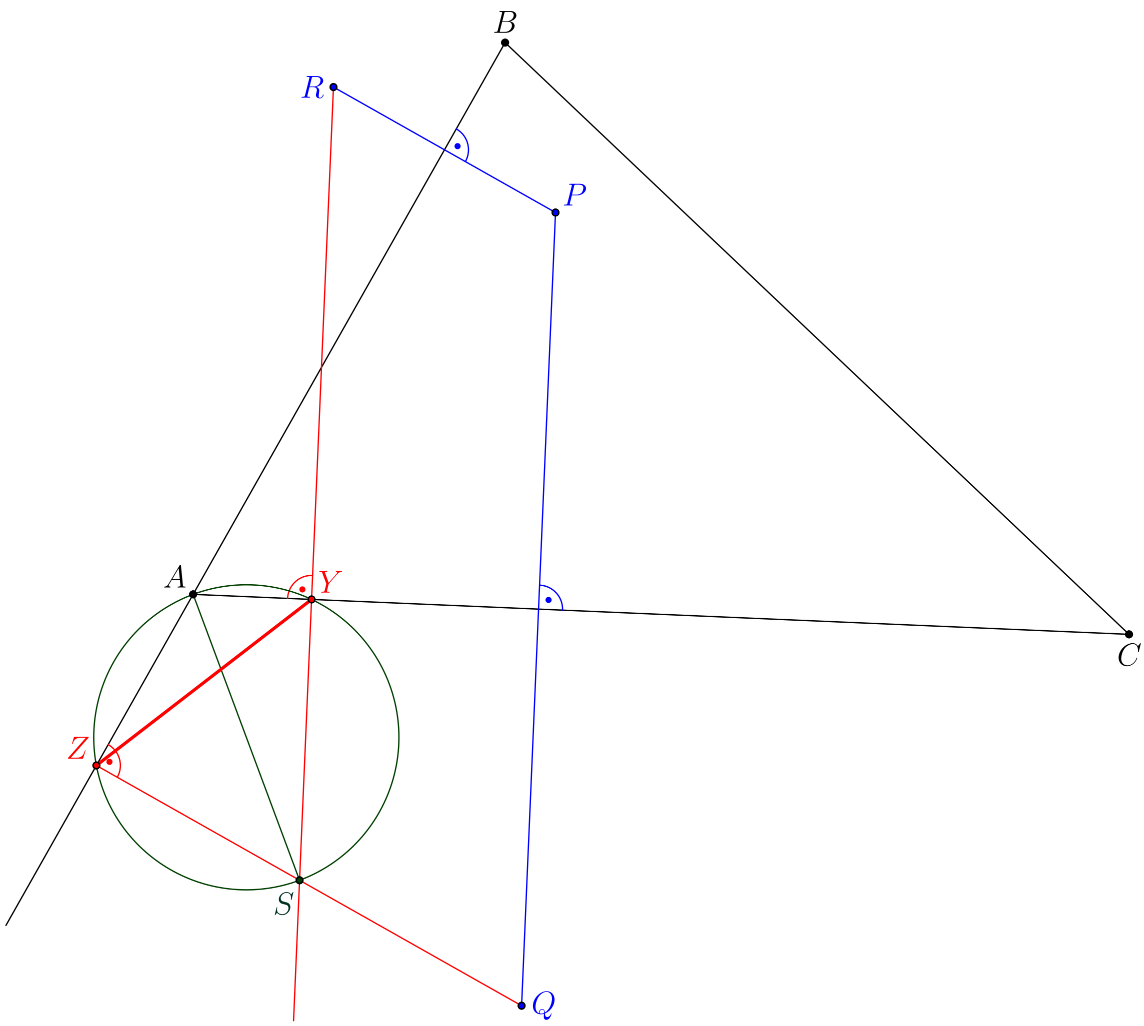

Fig. 5: zur zweiten Lösung von Aufgabe 3

Daher ist

$$\begin{aligned}\measuredangle(YZ;\ HO) &= \underbrace{\measuredangle(YZ;\ CA)}_{=\measuredangle(HO;\ CA)+90^\circ} + \underbrace{\measuredangle(CA;\ HO)}_{=-\measuredangle(HO;\ CA)} \qquad \text{(nach (27))}\\ &= \measuredangle(HO;\ CA) + 90^\circ + (-\measuredangle(HO;\ CA)) = 90^\circ.\end{aligned}$$

Folglich ist $YZ \perp HO$. Damit ist die Aufgabe gelöst. $\square$

Zweite Lösung zu Aufgabe 3: Wir verwenden im Folgenden orientierte Winkel modulo 180°; eine Einführung in diese Art von Winkeln findet sich (u.a.) in [Grinbe04].

(Siehe Fig. 5.) Das Lot von R auf die Gerade CA schneide das Lot von Q auf die Gerade AB in S. Dann ist $RS \perp CA$ und $QS \perp AB$. Andererseits gilt $PQ \perp CA$, denn Q ist das Spiegelbild von P an der Geraden CA. Analog gilt $PR \perp AB$. Aus $RS \perp CA$ und $PQ \perp CA$ folgt $RS \parallel PQ$. Analog gilt $QS \parallel PR$. Aus $RS \parallel PQ$ und $QS \parallel PR$ folgt, dass das Viereck $PRSQ$ ein Parallelogramm ist.

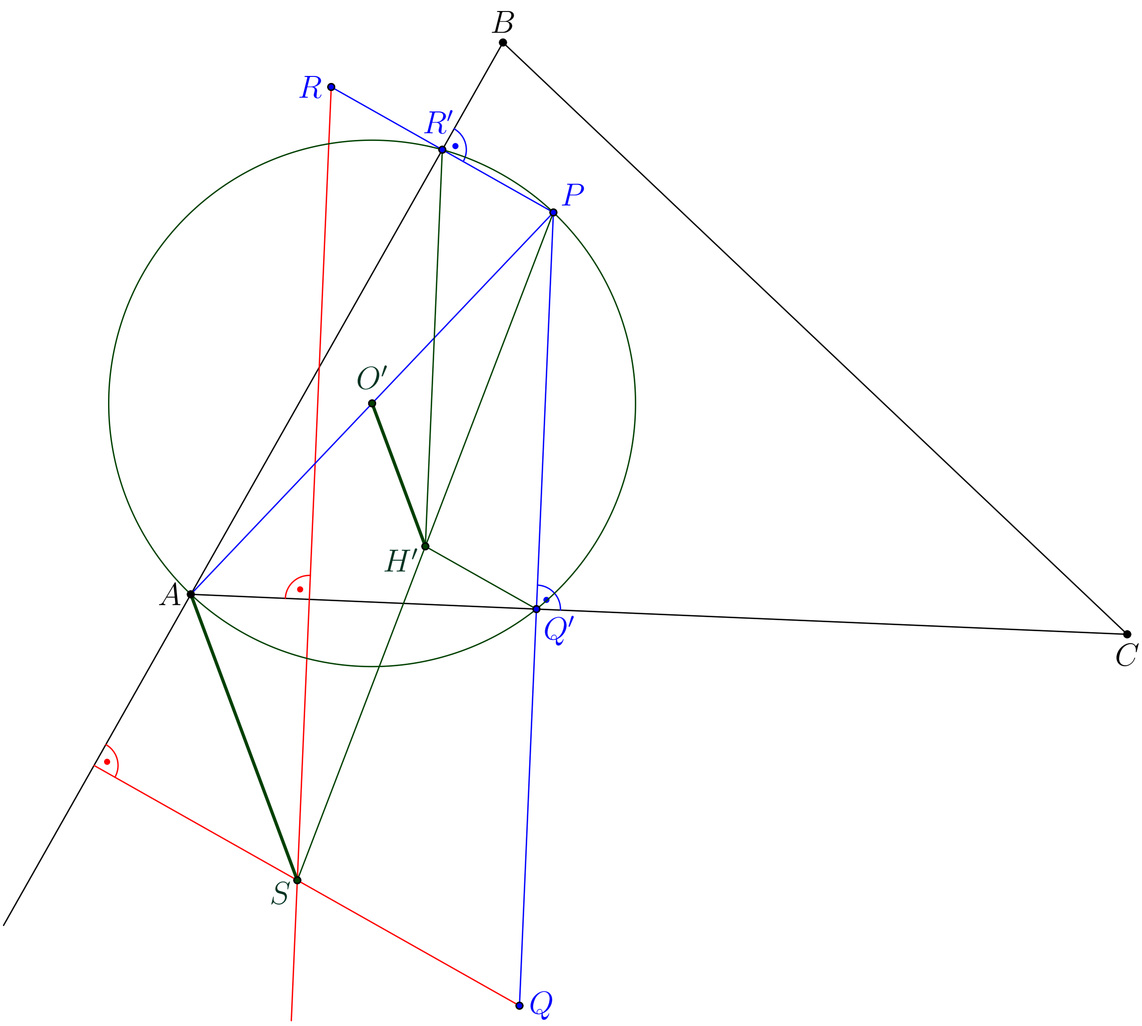

Fig. 6: zur zweiten Lösung von Aufgabe 3

Die Punkte Z und S liegen beide auf dem Lot von Q auf die Gerade AB; dabei ist Z der Fußpunkt dieses Lotes. Somit ist $\measuredangle AZS = 90°$. Der Punkt Z liegt also auf dem Thaleskreis über der Strecke AS. Aus analogen Gründen liegt auch Y auf diesem Thaleskreis. Somit liegen die vier Punkte A, S, Y und Z auf einem Kreis (nämlich auf dem ebengenannten Thaleskreis). Nach dem Umfangswinkelsatz ist also $\measuredangle AYZ = \measuredangle ASZ$. Andererseits ist $ZS \perp AB$ (denn die Punkte Z und S liegen beide auf dem Lot von Q auf die Gerade AB) und somit $\measuredangle(AB;\ ZS) = 90°$. Nun ist

$$\begin{aligned}\measuredangle(CA;\ YZ) = \measuredangle AYZ = \measuredangle ASZ &= \measuredangle(AS;\ ZS) = \measuredangle(AS;\ AB) + \underbrace{\measuredangle(AB;\ ZS)}_{=90°} \\ &= \measuredangle(AS;\ AB) + 90°. \qquad (30)\end{aligned}$$

Um $YZ \perp HO$ zu zeigen, lohnt es sich also, den Winkel $\measuredangle(AS;\ AB)$ zu berechnen.

(Siehe Fig. 6.) Seien nun Q' und R' die Fußpunkte der Lote von P auf die

Geraden CA bzw. AB. Also gilt $\measuredangle AQ'P = 90^\circ$ und $\measuredangle AR'P = 90^\circ$. Die Punkte Q' und R' liegen also auf dem Thaleskreis über der Strecke AP. Der Mittelpunkt dieses Thaleskreises ist der Mittelpunkt dieser Strecke AP. Sei O' dieser Mittelpunkt.

Der Fußpunkt des Lotes von einem Punkt X auf eine Gerade g ist bekanntlich immer der Mittelpunkt der Strecke zwischen X und dem Spiegelbild von X an g. Somit ist Q' der Mittelpunkt der Strecke PQ (denn Q' ist der Fußpunkt des Lotes von P auf die Gerade CA, während Q das Spiegelbild von P an dieser Geraden CA ist). Aus analogen Gründen ist R' der Mittelpunkt der Strecke PR.

Der Umkreis des Dreiecks $AQ'R'$ ist der Thaleskreis über der Strecke AP (denn die Punkte A, Q' und R' liegen alle auf diesem Thaleskreis). Der Mittelpunkt dieses Umkreises ist daher der Mittelpunkt dieses Thaleskreises, also der Punkt O' (denn wir haben oben gezeigt, dass O' der Mittelpunkt des Thaleskreises über der Strecke AP ist). Mit anderen Worten: Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $AQ'R'$ ist O'.

Sei H' der Mittelpunkt der Strecke PS. Dann ist $H'R'$ eine Mittelparallele im Dreieck SPR (denn R' ist der Mittelpunkt der Strecke PR), und ist somit parallel zu dessen Seite RS. Wir haben also $H'R' \parallel RS$ und deshalb $H'R' \perp CA$ (denn $RS \perp CA$). Mit anderen Worten: $H'R' \perp AQ'$ (denn die Gerade AQ' ist die Gerade CA). Der Punkt H' liegt also auf der von R' ausgehenden Höhe des Dreiecks $AQ'R'$. Analog sehen wir ein, dass derselbe Punkt H' auch auf der von Q' ausgehenden Höhe dieses Dreiecks liegt. Somit liegt H' auf zwei Höhen dieses Dreiecks; daher muss H' der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks sein.

Die Punkte H' und O' sind die Mittelpunkte der Strecken PS bzw. AP. Somit ist $H'O'$ eine Mittelparallele im Dreieck APS, und ist daher parallel zu dessen Seite AS. Wir haben also $H'O' \parallel AS$, und daher

$$\measuredangle \left(H'O';\ AB\right) = \measuredangle \left(AS;\ AB\right). \tag{31}$$

(Siehe Fig. 7.) Nun werden wir zeigen, dass das Dreieck $AQ'R'$ zum Dreieck ABC gegensinnig ähnlich ist (wobei die Ecken A, Q' und R' des ersteren genau den Ecken A, B bzw. C des letzteren entsprechen). Dies ist ein bekannter Satz, aber der Vollständigkeit halber sei hier sein Beweis vorgestellt: Da R' der Fußpunkt des Lotes von P auf AB ist, gilt $\measuredangle AR'P = 90^\circ$. Analog gilt $\measuredangle AQ'P = 90^\circ$. Somit liegen die Punkte R' und Q' beide auf dem Thaleskreis über der Strecke AP. Da auch die Punkte A und P auf diesem Thaleskreis liegen, liegen also die vier Punkte A, P, R' und Q' auf einem Kreis (nämlich auf dem ebengenannten Thaleskreis). Somit gilt nach dem Umfangswinkelsatz

$$\begin{aligned}\measuredangle AQ'R' &= \measuredangle APR' = \measuredangle \left(AP;\ PR'\right) = \underbrace{\measuredangle \left(AP;\ BC\right)}_{\substack{=90^\circ \\ \text{(denn } AP\perp BC\text{)}}} + \underbrace{\measuredangle \left(BC;\ AB\right)}_{=\measuredangle CBA = -\measuredangle ABC} + \underbrace{\measuredangle \left(AB;\ PR'\right)}_{=\measuredangle AR'P = 90^\circ} \\ &= 90^\circ + \left(-\measuredangle ABC\right) + 90^\circ = \underbrace{90^\circ + 90^\circ}_{=180^\circ = 0^\circ} - \measuredangle ABC = -\measuredangle ABC.\end{aligned}$$

Analog erhalten wir $\measuredangle AR'Q' = -\measuredangle ACB$. Aus diesen zwei Gleichungen folgt, dass

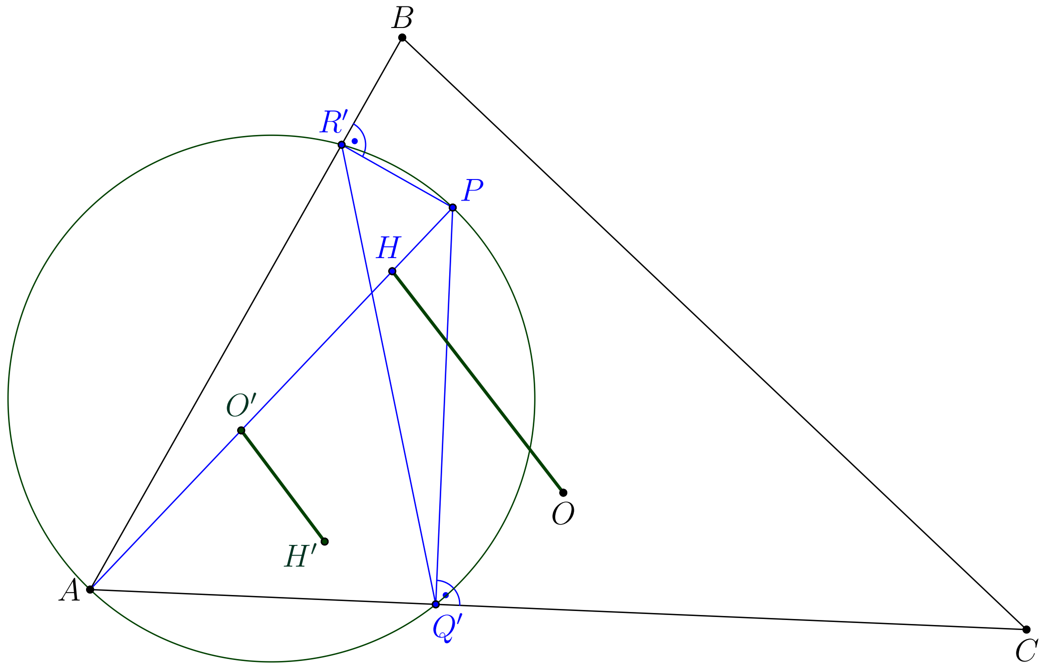

Fig. 7: zur zweiten Lösung von Aufgabe 3

die Dreiecke $AQ'R'$ und ABC zueinander gegensinnig ähnlich sind (nach dem ww-Ähnlichkeitskriterium).

Folglich gibt es eine gegensinnige Ähnlichkeitsabbildung $\ddot{a}$, die das Dreieck ABC in das Dreieck $AQ'R'$ überführt (also die Punkte A, B und C jeweils nach A, Q' bzw. R' abbildet). Betrachten wir diese Abbildung $\ddot{a}$. Da die Abbildung $\ddot{a}$ das Dreieck ABC in das Dreieck $AQ'R'$ überführt, muss sie auch jeden merkwürdigen Punkt des Dreiecks ABC auf den entsprechenden Punkt des Dreiecks $AQ'R'$ abbilden (denn $\ddot{a}$ ist eine Ähnlichkeitsabbildung). Insbesondere bildet also $\ddot{a}$ den Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC auf den Höhenschnittpunkt des Dreiecks $AQ'R'$ ab. Mit anderen Worten: Die Abbildung $\ddot{a}$ bildet den Punkt H auf H' ab (denn H ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, und H' ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $AQ'R'$).

Wir haben vorhin gezeigt, dass $\ddot{a}$ jeden merkwürdigen Punkt des Dreiecks ABC auf den entsprechenden Punkt des Dreiecks $AQ'R'$ abbildet. Also bildet $\ddot{a}$ insbesondere den Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC auf den Umkreismittelpunkt des Dreiecks $AQ'R'$ ab. Mit anderen Worten: Die Abbildung $\ddot{a}$ bildet den Punkt O auf O' ab (denn O ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC, und O' ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $AQ'R'$).

Nun ist $\ddot{a}$ eine gegensinnige Ähnlichkeitsabbildung. Folglich läßt sie orientierte Winkel bis aufs Vorzeichen unverändert, kehrt dabei aber ihr Vorzeichen um. Somit muss

$$\measuredangle\left(H'O';\ R'A\right) = -\measuredangle\left(HO;\ CA\right) \tag{32}$$

sein (denn $\ddot{a}$ bildet die Punkte A, C, H und O auf die Punkte A, R', H' bzw. O' ab).

Insgesamt erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
\measuredangle\left(CA;\ YZ\right) &= \underbrace{\measuredangle\left(AS;\ AB\right)}_{\substack{=\measuredangle(H'O';\ AB) \\ \text{(nach (31))}}} + 90^\circ && \text{(nach (30))} \\
&= \measuredangle\left(H'O';\ AB\right) + 90^\circ \\
&= \measuredangle\left(H'O';\ R'A\right) + 90^\circ && \left(\text{denn die Gerade } AB \text{ ist die Gerade } R'A\right) \\
&= -\measuredangle\left(HO;\ CA\right) + 90^\circ && \text{(nach (32))}.
\end{aligned}$$

Somit gilt $\measuredangle\left(HO;\ CA\right) + \measuredangle\left(CA;\ YZ\right) = 90^\circ$. Wegen $\measuredangle\left(HO;\ CA\right) + \measuredangle\left(CA;\ YZ\right) = \measuredangle\left(HO;\ YZ\right)$ vereinfacht sich dies zu $\measuredangle\left(HO;\ YZ\right) = 90^\circ$. Daher ist $YZ \perp HO$. Aufgabe 3 ist somit erneut gelöst. □

> **Bemerkung 2.17.** Die Gerade HO in Aufgabe 3 ist natürlich die wohlbekannte Eulergerade des Dreiecks ABC. Es ist eine Reihe von Konstruktionen bekannt, die zu HO orthogonale Geraden ergeben (in [Ayme21] gibt es eine ganze Sammlung), aber unsere Gerade YZ scheint neu zu sein.

> **Bemerkung 2.18.** Aufgabe 3 ist vage inspiriert von `https://web.evanchen.cc/twitch/Ep048-CMIMC-2017-G9-Solution.pdf` .

> **Bemerkung 2.19.** Folgende Aufgabe ist eine Variante von Aufgabe 3:
>
> > **Aufgabe 5.** Sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt O. Die Senkrechte auf die Gerade CA durch C schneide die Gerade AB in F. Die Senkrechte auf die Gerade AB durch B schneide die Gerade CA in E. Sei F' das Spiegelbild von F an B. Sei E' das Spiegelbild von E an C. Wir nehmen an, dass $H \neq O$ und $E' \neq F'$ gilt. Man zeige: $E'F' \perp HO$.
>
> Der Leser kann sich überlegen, wie diese Aufgabe aus Aufgabe 3 hergeleitet werden kann.

References

[Ayme21] Jean-Louis Ayme, *3. Perpendiculaires à la droite d'Euler*, 13 August 2021.

[Grinbe04] Darij Grinberg, *Orientierte Winkel modulo* 180° *und eine Lösung der WURZEL-Aufgabe* κ *22 von Wilfried Haag*, 2004.

[Netzer17] Tim Netzer, *Non-Nudgable Subgroups of Permutations*, arXiv:1706.06929v2