Einführung in algebraische Ungleichungen I

Darij Grinberg

6. Februar 2021
unfertige Version![*]

(Aufgabenblatt für IMO-Training 2021 Deutschland)

Inhaltsverzeichnis

[*]Eine aktuelle Version dieses Aufgabenblattes kann auf `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/algebra/aimo2021-ineqs.pdf` gefunden werden.

***

Algebraische Ungleichungen sind eines der klassischen Topoi von Mathematikwettbewerben, und haben auch für andere Gebiete Relevanz. Zu meiner IMO-Zeit (2004–2006) hatten sie besonders im Internet eine enorme Popularität (das AoPS-Forum war voll von Drei-Variablen-Ungleichungen mit immer technischeren Beweisen); diese ist seitdem etwas abgeflaut (wohl nicht zuletzt wegen der zunehmenden Theoretisierung, die zu starke Vorteile für Bücher- und Forenleser hervorgebracht hat), aber nach wie vor hat jede IMO-Shortlist mindestens zwei Ungleichung.

Diese kleine Einführung ersetzt keinen Expertenkurs, aber sollte einige Methoden und Ideen vermitteln. Mehr (oftmals viel mehr) ist in Quellen wie [Steele04], [Mildor06], [Lee07], [Cirtoa06], [Hung07], [LeLoPo08] und [Chen20, OTIS Excerpts] zu finden.

0.1. Notationen

Im Folgenden bedeute $\mathbb{N}$ die Menge $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

1. AM-GM

1.1. Die Ur-Ungleichung und AM-GM für zwei Zahlen

Die “Mutter aller Ungleichungen” ist folgender Satz:

Satz 1.1 (Die Ur-Ungleichung)**.** Für jede reelle Zahl x ist $x^2 \geq 0$.

Hinweise zum Beweis von Satz 1.1. Wer es wirklich nicht glaubt: erst auf den Fall $x \in \mathbb{Q}$ reduzieren (durch Grenzwertbildung); dann auf den Fall $x \in \mathbb{Z}$ reduzieren (denn jedes $x \in \mathbb{Q}$ ist darstellbar als $x = u/v$ für gewisse $u, v \in \mathbb{Z}$); dann auf den Fall $x \in \mathbb{N}$ reduzieren (weil $(-x)^2 = x^2$); dort ist es aber klar. Die Details finden sich in jedem guten Analysisbuch. $\square$

Die meisten Ungleichungen, die wir im folgenden beweisen, sind Folgerungen (oder Folgerungen von Folgerungen, oder Folgerungen von Folgerungen von Folgerungen...) von Satz 1.1. Hier ist die erste Generation:

Satz 1.2 (AM-GM-Ungleichung für zwei Zahlen)**.** Seien a und b zwei reelle Zahlen.

(a) Es gilt $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

(b) Es gilt $(a+b)^2 \geq 4ab$.

(c) Sind a und b nichtnegativ, dann ist $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

(d) Sind a und b positiv, dann ist $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Beweis von Satz 1.2. **(a)** Wir haben

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$$

(nach Satz 1.1, angewandt auf $x = a - b$). Also ist $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Hieraus folgt Satz 1.2 **(a)**.

(b) Wir haben $(a+b)^2 = \underbrace{a^2 + b^2}_{\substack{\geq 2ab \\ \text{(laut Satz 1.2 (a))}}} + 2ab \geq 2ab + 2ab = 4ab$. Damit ist Satz 1.2 **(b)** bewiesen.

(c) Seien a und b nichtnegativ. Satz 1.2 **(b)** ergibt $(a+b)^2 \geq 4ab = \left(2\sqrt{ab}\right)^2$. Wir können die Quadrate auf beiden Seiten dieser Ungleichung loswerden, indem wir Quadratwurzeln ziehen (denn $a + b$ und $2\sqrt{ab}$ sind nichtnegativ); somit erhalten wir $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Satz 1.2 **(c)** ist somit bewiesen.

(d) Seien a und b positiv. Satz 1.2 **(a)** ergibt $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Wir können diese Ungleichung durch ab dividieren (denn ab ist positiv); somit erhalten wir $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$. Das heißt, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ (denn $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$). Satz 1.2 **(d)** ist somit bewiesen. □

Satz 1.2 wird oft die *AM-GM-Ungleichung für zwei Zahlen* genannt. Er mag unschuldig klingen, reicht aber für viele Anwendungen vollkommen aus. Hier sind einige der einfachsten Beispiele.

Beispiel 1.3. Seien a, b, c drei reelle Zahlen. Man beweise:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ca + ab. \tag{1}$$

Lösung zu Beispiel 1.3. Aus Satz 1.2 **(a)** folgen die drei Ungleichungen

$$b^2 + c^2 \geq 2bc;$$
$$c^2 + a^2 \geq 2ca;$$
$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Addieren wir diese drei Ungleichungen auf, so erhalten wir

$$\left(b^2+c^2\right)+\left(c^2+a^2\right)+\left(a^2+b^2\right) \geq 2bc+2ca+2ab.$$

Dies vereinfacht sich zu

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 2\left(bc+ca+ab\right).$$

Division durch 2 ergibt nun (1). Damit ist Beispiel 1.3 gelöst. □

Beispiel 1.4. Seien x, y, z drei nichtnegative reelle Zahlen. Man beweise:

$$(y+z)(z+x)(x+y) \geq 8xyz. \tag{2}$$

Lösung zu Beispiel 1.4. Aus Satz 1.2 **(c)** folgen die drei Ungleichungen

$$\begin{aligned} y+z &\geq 2\sqrt{yz}; \\ z+x &\geq 2\sqrt{zx}; \\ x+y &\geq 2\sqrt{xy}. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir diese drei Ungleichungen[1], so erhalten wir

$$(y+z)(z+x)(x+y) \geq 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx}\cdot 2\sqrt{xy} = 8xyz.$$

Damit ist Beispiel 1.4 gelöst. □

Beispiel 1.5. Seien a, b, c, d vier nichtnegative reelle Zahlen. Man beweise:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd}. \tag{3}$$

Lösung zu Beispiel 1.5. Da alle in (3) vorkommenden Zahlen nichtnegativ sind, können wir die zu beweisende Ungleichung (3) quadrieren (ohne dass sich dabei ihr Wahrheitsgehalt ändert). Das heißt, es reicht aus, dass wir die Ungleichung

$$\left(\sqrt{(a+c)(b+d)}\right)^2 \geq \left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)^2$$

beweisen. Doch letztere Ungleichung können wir ziemlich einfach zeigen: Wir haben

$$\left(\sqrt{(a+c)(b+d)}\right)^2 = (a+c)(b+d) = ab+ad+bc+cd.$$

[1] Dies dürfen wir tun, denn alle Seiten dieser drei Ungleichungen sind nichtnegativ.

Wegen

$$\begin{aligned}
ad + bc &\geq 2\sqrt{ad \cdot bc} \\
&\qquad \text{(nach Satz 1.2 } \textbf{(c)}\text{, angewendet auf } ad \text{ und } bc \text{ statt } a \text{ und } b\text{)} \\
&= 2\sqrt{ab \cdot cd} \qquad (\text{denn } ad \cdot bc = ab \cdot cd) \\
&= 2\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}
\end{aligned}$$

ist also

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{(a+c)(b+d)}\right)^2 &= \underbrace{ab}_{=\left(\sqrt{ab}\right)^2} + \underbrace{ad+bc}_{\geq 2\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} + \underbrace{cd}_{=\left(\sqrt{cd}\right)^2} \\
&\geq \left(\sqrt{ab}\right)^2 + 2\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd} + \left(\sqrt{cd}\right)^2 = \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Wie gesagt, ist dies ausreichend, um Beispiel 1.5 zu lösen. □

Beispiel 1.6. Seien a, b, c drei positive reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c.$$

Lösung zu Beispiel 1.6. Dies ist ein Paradebeispiel für *Substitution*. Und zwar definieren wir drei positive reelle Zahlen x, y, z durch $x = \sqrt{\frac{bc}{a}}$, $y = \sqrt{\frac{ca}{b}}$ und $z = \sqrt{\frac{ab}{c}}$. (Dies ist erlaubt, denn unter den Quadratwurzeln stehen nur positive reelle Zahlen.) Nun wenden wir Beispiel 1.3 auf x, y, z statt a, b, c an. Hierdurch erhalten wir

$$\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)^2 \geq \sqrt{\frac{ca}{b}} \cdot \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \cdot \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} \cdot \sqrt{\frac{ca}{b}}.$$

Dies vereinfacht sich zu

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$$

(denn $\sqrt{\frac{ca}{b}} \cdot \sqrt{\frac{ab}{c}} = a$ und $\sqrt{\frac{ab}{c}} \cdot \sqrt{\frac{bc}{a}} = b$ und $\sqrt{\frac{bc}{a}} \cdot \sqrt{\frac{ca}{b}} = c$). Beispiel 1.6 ist damit gelöst. □

Beispiel 1.7 (Nesbitt-Ungleichung)**.** Seien a, b, c drei positive reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Lösung zu Beispiel 1.7. Wir setzen $x = b + c$, $y = c + a$ und $z = a + b$. Somit sind auch x, y, z drei positive reelle Zahlen. Nun prüft man leicht nach, dass $x + y + z = 2a + 2b + 2c$ ist. Also ist

$$2a = x + y + z - (2b + 2c) = x + y + z - 2\underbrace{(b + c)}_{=x} = x + y + z - 2x = y + z - x.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \frac{2a}{b+c} &= \frac{y+z-x}{x} \qquad \qquad (\text{denn } 2a = y + z - x \text{ und } b + c = x) \\ &= \frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1. \end{aligned}$$

Analog ist

$$\frac{2b}{c+a} = \frac{z}{y} + \frac{x}{y} - 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{2c}{a+b} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1.$$

Addieren wir diese drei Gleichungen auf, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} &= \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{x}{y} - 1\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1\right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right)}_{\substack{\geq 2 \\ \text{(nach Satz 1.2 (d))}}} + \underbrace{\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)}_{\substack{\geq 2 \\ \text{(nach Satz 1.2 (d))}}} + \underbrace{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)}_{\substack{\geq 2 \\ \text{(nach Satz 1.2 (d))}}} - 3 \\ &\geq 2 + 2 + 2 - 3 = 3. \end{aligned}$$

Dividieren wir nun beide Seiten dieser Ungleichung durch 2, so erhalten wir

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Damit ist Beispiel 1.7 bewiesen. □

Beispiel 1.8. Seien a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks. Man beweise:

$$abc \geq (2a - b)(2b - c)(2c - a). \tag{4}$$

Die Bedingung, dass a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks sind, ist hier wichtig; für $(a, b, c) = (1, 4, 10)$ beispielsweise ist die Ungleichung falsch.

Lösung zu Beispiel 1.8. Da a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks ist, gilt nach den Dreiecksungleichungen $b + c > a$ und $c + a > b$ und $a + b > c$. Ferner sind a, b, c positiv.

Somit ist höchstens eine der drei Zahlen $2a - b$, $2b - c$ und $2c - a$ negativ. [*Beweis:* Nehmen wir das Gegenteil an. Dann sind also mindestens zwei von diesen drei Zahlen negativ. O. B. d. A. seien also $2a - b$ und $2b - c$ negativ (denn sonst können wir dies durch eine zyklische Vertauschung von a, b, c erreichen). Dann ist also $2a < b$ und $2b < c$. Da a positiv ist, gilt nun $a < 2a < b$ und somit $\underbrace{a}_{<b} + b < b + b = 2b < c$. Dies widerspricht $a + b > c$. Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch ist. Damit ist gezeigt, dass höchstens eine der drei Zahlen $2a - b$, $2b - c$ und $2c - a$ negativ ist.]

Wir müssen die Ungleichung (4) beweisen. Wenn genau eine der drei Zahlen $2a - b$, $2b - c$ und $2c - a$ negativ ist, dann ist diese Ungleichung trivial (denn in diesem Fall ist die rechte Seite dieser Ungleichung ≤ 0, während die linke Seite offensichtlich ≥ 0 ist). Somit dürfen wir o. B. d. A. annehmen, dass **nicht** genau eine der drei Zahlen $2a - b$, $2b - c$ und $2c - a$ negativ ist. Nehmen wir dies an. Folglich ist **keine** der drei Zahlen $2a - b$, $2b - c$ und $2c - a$ negativ (denn wir wissen bereits, dass höchstens eine der drei Zahlen $2a - b$, $2b - c$ und $2c - a$ negativ ist). Das heißt, die drei Zahlen $2a - b$, $2b - c$ und $2c - a$ sind nichtnegativ.

Nun ist $((2a - b) + b)^2 \geq 4 (2a - b) b$ (laut Satz 1.2 **(b)**, angewandt auf $2a - b$ statt a). Wegen $(2a - b) + b = 2a$ vereinfacht sich dies zu $(2a)^2 \geq 4 (2a - b) b$. Dividieren wir diese Ungleichung durch 4, so erhalten wir

$$a^2 \geq (2a - b) b.$$

[2] Analog gilt

$$\begin{aligned} b^2 &\geq (2b - c) c \qquad \text{und} \\ c^2 &\geq (2c - a) a. \end{aligned}$$

Wir können diese drei Ungleichungen miteinander multiplizieren (denn wir wissen, dass die drei Zahlen $2a - b$, $2b - c$ und $2c - a$ nichtnegativ sind; somit sind alle Seiten dieser drei Ungleichungen nichtnegativ); somit erhalten wir

$$a^2 b^2 c^2 \geq (2a - b) b \cdot (2b - c) c \cdot (2c - a) a.$$

Diese Ungleichung können wir durch abc dividieren (denn a, b, c sind positiv), und erhalten somit

$$abc \geq (2a - b)(2b - c)(2c - a).$$

Damit ist (4) bewiesen. Beispiel 1.8 ist also gelöst. □

[2]Alternativ können wir diese Ungleichung auch einsehen, indem wir die rechte Seite von der linken subtrahieren: Nämlich ist $a^2 - (2a - b) b = (a - b)^2 \geq 0$.

Bemerkung 1.9. Wir werden uns zwar nicht oft mit Gleichheitsfällen befassen, doch ein paar Anmerkungen zu ihnen sind wohl nicht fehl am Platz, da sie Anwendungen haben (die Faustregel ist: überall dort, wo eine Ungleichung gebraucht wird, wird früher oder später auch eine Analyse ihrer Gleichheitsfälle nützlich). Wir gehen also kurz die oben bewiesenen Ungleichungen durch und analysieren, wann sie zu Gleichheiten werden:

- Die Ungleichung $x^2 \geq 0$ in Satz 1.1 wird genau dann zur Gleichheit, wenn $x = 0$ ist. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $x^2 > 0$. (Um dies zu zeigen, benötigt man die Tatsache, dass es für jede positive reelle Zahl ε eine positive ganze Zahl n mit $\varepsilon > 1/n$ gibt.)

- Die Ungleichung $a^2 + b^2 \geq 2ab$ in Satz 1.2 **(a)** wird genau dann zur Gleichheit, wenn $a = b$ ist. (Denn wenn $a \neq b$ ist, dann ist $a - b \neq 0$ und somit $(a-b)^2 > 0$; somit können die "$\geq$"-Zeichen im Beweis von Satz 1.2 **(a)** in diesem Fall durch "$>$"-Zeichen ersetzt werden.)

- Die Ungleichung $(a+b)^2 \geq 4ab$ in Satz 1.2 **(b)** wird genau dann zur Gleichheit, wenn $a = b$ ist. (Dies folgt aus dem gleichen Grund wie die analoge Aussage über Satz 1.2 **(a)**.)

- Selbiges gilt für die Ungleichungen in Satz 1.2 **(c)** und in in Satz 1.2 **(d)**.

- Die Ungleichung (1) in Beispiel 1.3 wird genau dann zur Gleichheit, wenn $a = b = c$ ist. (Denn diese Ungleichung wurde durch Aufaddieren der drei Ungleichungen $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ca$ und $a^2 + b^2 \geq 2ab$ erhalten. Damit sind zur Gleichheit wird, müssen also alle drei aufaddierten Ungleichungen zu Gleichheiten werden. Aber dazu ist es nötig, dass $b = c$ und $c = a$ und $a = b$ gilt, denn wir haben ja bereits analysiert, wann die Ungleichung von Satz 1.2 **(a)** zur Gleichheit wird. Das heißt, es ist nötig, dass $a = b = c$ ist.)

- Die Ungleichung (2) in Beispiel 1.4 wird genau dann zur Gleichheit, wenn

  $$x = y = z \text{ oder } y = z = 0 \text{ oder } z = x = 0 \text{ oder } x = y = 0$$

  ist. (Die einfachste Methode, dies einzusehen, ist wohl durch Fallunterscheidung. Wir haben die Ungleichung (2) erhalten, indem wir die drei Ungleichungen $y + z \geq 2\sqrt{yz}$, $z + x \geq 2\sqrt{zx}$ und $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ multipliziert haben. Wenn **alle** drei Zahlen x, y, z von 0 verschieden sind, dann sind alle Seiten dieser drei Ungleichungen positiv, und somit wird das Produkt dieser Ungleichungen nur dann zur Gleichheit, wenn sie alle zu Gleichheiten werden; dazu muss aber $y = z$ und $z = x$ und $x = y$ gelten, also $x = y = z$. Die "interessanteren" Fälle sind die, in denen **nicht** alle drei Zahlen x, y, z von 0 verschieden sind. In solchen Fällen kann es vorkommen, dass auch eine strikte Ungleichung (also eine, die nicht zur Gleichheit wird) nach Multiplikation mit einer anderen Ungleichung zur Gleichheit wird. So wird beispielsweise das Produkt der zwei Ungleichungen $1 \geq 0$ und $0 \geq 0$ zur Gleichheit $1 \cdot 0 = 0 \cdot 0$, obwohl die erste multiplizierte Ungleichung $1 \geq 0$ keine Gleichheit ist. Also muss man hier vorsichtiger vorgehen. Zum Glück lassen sich diese Fälle leicht einzeln angehen: Wenn **genau zwei** der drei Zahlen x, y, z von 0 verschieden sind (d.h., genau eine dieser drei Zahlen x, y, z ist gleich 0), dann wird die Ungleichung (2) **nicht** zur Gleichheit, da die linke Seite positiv ist und die rechte gleich 0. Wenn aber **höchstens eine** der drei Zahlen x, y, z von 0 verschieden ist (d.h., mindestens zwei von ihnen sind gleich 0), dann wird die Ungleichung (2) zur Gleichheit (weil beide Seiten 0 sind). Somit erhalten wir obige Klassifikation der Gleichheitsfälle.)

- Die Ungleichung (3) in Beispiel 1.5 wird genau dann zur Gleichheit, wenn $ad = bc$ ist. (Dies sieht man leicht aus dem Beweis, da wir ja wissen, wann die Ungleichung in Satz 1.2 **(c)** zur Gleichheit wird.)

- Die Ungleichung in Beispiel 1.6 wird genau dann zur Gleichheit, wenn $a = b = c$ ist. (Um dies einzusehen, schauen wir uns wieder den Beweis an. Wir müssen also nur zeigen, dass $\sqrt{\frac{bc}{a}} = \sqrt{\frac{ca}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{c}}$ genau dann gilt, wenn $a = b = c$ ist. Dies ist aber leicht.)

- Die Ungleichung in Beispiel 1.7 wird genau dann zur Gleichheit, wenn $a = b = c$ ist. (Auch dies folgt unschwer aus unserem Beweis dieser Ungleichung. Denn die dort definierten drei Zahlen x, y, z erfüllen $x = y = z$ genau dann, wenn $a = b = c$ ist.)

Aufgabe 1. Seien a und b zwei reelle Zahlen.

(a) Man beweise: $2\left(a^2 + b^2\right) \geq (a+b)^2$.

(b) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $p_i = a^i + b^i$. Sei m eine positive ganze Zahl. Man zeige, dass $p_{m+1}p_{m-1} \geq p_m^2$ gilt, wenn $ab \geq 0$ ist oder wenn m ungerade ist.

Aufgabe 2. Seien a, b, c drei reelle Zahlen.

(a) Man beweise: $3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$.

(b) Man beweise: $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \geq abc\,(a+b+c)$.

Aufgabe 3. Seien a, b, c, d vier reelle Zahlen.

(a) Man beweise: $\frac{1}{2}(a+b+c+d)^2 \geq (a+c)(b+d) + 2\,(ac+bd)$.

(b) Man beweise:

$$3\left(a+b+c+d\right)^2 \geq 8\left(ab+ac+ad+bc+bd+cd\right).$$

Folgende Aufgabe verallgemeinert Beispiel 1.7:

Aufgabe 4. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige n positive reelle Zahlen. Man zeige:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

(Im Nenner auf der linken Seite steht die Summe aller Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bis auf a_i.)

Die *Cauchy–Schwarz-Ungleichung* besagt folgendes:

Satz 1.10 (Cauchy–Schwarz-Ungleichung)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sowie $b_1, b_2, \ldots, b_n$ beliebige reelle Zahlen. Dann gilt

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\right)^2.$$

Aufgabe 5. Man beweise Satz 1.10 folgendermaßen:

Setze $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ und $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$. Zeige, dass $a_i^2 B^2 + b_i^2 A^2 \geq 2 a_i b_i AB$ für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt. Summiere diese Ungleichung über alle i auf, und vereinfache.

(Dieser Beweis der Cauchy–Schwarz-Ungleichung enstammt [Lin12]. Wir werden später deutlich mehr über diese Ungleichung erfahren.)

1.2. Einige Anwendungen

Die AM-GM-Ungleichung für zwei Zahlen ist schon für einiges gut! Die folgenden zwei Beispiele aus der Graphentheorie sollten das illustrieren:

Beispiel 1.11 (Satz von Mantel)**.** Sei G ein schlichter ungerichteter Graph[3] mit n Knoten und mehr als $n^2/4$ Kanten. Man zeige: Der Graph G hat drei Knoten a, b und c, die paarweise benachbart sind.

[3] Zur Erinnerung: Ein Graph heißt *schlicht*, wenn er keine Schlingen und keine Mehrfachkanten hat.

Lösung zu Beispiel 1.11. Nehmen wir das Gegenteil an. Der Graph G hat also keine drei Knoten a, b und c, die paarweise benachbart sind.

Für jeden Knoten v von G sei $N(v)$ die Menge aller zu v benachbarten Knoten von G. Sei V die Menge aller Knoten von G. Dann ist also $|V| = n$ (denn G hat n Knoten). Der Graph G hat mehr als $n^2/4$ Kanten, also mehr als 0 Kanten (denn $n^2/4 \geq 0$); folglich muss der Graph G auch mindestens einen Knoten haben. Das heißt, $V \neq \varnothing$.

Wir wählen nun einen Knoten v von G, für den $|N(v)|$ maximal ist. (Dies ist möglich, denn $V \neq \varnothing$.) Dann gilt also

$$|N(x)| \leq |N(v)| \qquad \text{für jeden Knoten } x \in V. \tag{5}$$

Nun haben wir aber angenommen, dass der Graph G keine drei Knoten a, b und c hat, die paarweise benachbart sind. Insbesondere dürfen also zwei verschiedene Nachbarn von v nicht miteinander benachbart sein. Mit anderen Worten: Zwei verschiedene Knoten in $N(v)$ dürfen nicht miteinander benachbart sein. Mit noch anderen Worten: Es ist nicht möglich, dass beide Endknoten einer Kante von G in $N(v)$ liegen. Das heißt, jede Kante von G hat mindestens einen Endknoten in $V \setminus N(v)$. Das heißt, jede Kante von G verläuft durch mindestens einen Knoten $x \in V \setminus N(v)$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
&(\text{Anzahl aller Kanten von } G) \\
&\leq \sum_{x \in V \setminus N(v)} \underbrace{(\text{Anzahl aller Kanten von } G\text{, die durch } x \text{ verlaufen})}_{=(\text{Anzahl aller Nachbarn von } x) = |N(x)|} \\
&= \sum_{x \in V \setminus N(v)} \underbrace{|N(x)|}_{\substack{\leq |N(v)| \\ \text{(nach (5))}}} \leq \sum_{x \in V \setminus N(v)} |N(v)| = |V \setminus N(v)| \cdot |N(v)|,
\end{aligned}$$

also

$$|V \setminus N(v)| \cdot |N(v)| \geq (\text{Anzahl aller Kanten von } G) > n^2/4 \tag{6}$$

(denn G hat mehr als $n^2/4$ Kanten). Doch wegen $N(v) \subseteq V$ gilt $|V \setminus N(v)| = |V| - |N(v)|$ und somit $|V \setminus N(v)| + |N(v)| = |V| = n$. Also ist $n = |V \setminus N(v)| + |N(v)|$, daher

$$\begin{aligned}
n^2 &= (|V \setminus N(v)| + |N(v)|)^2 \geq 4 \cdot \underbrace{|V \setminus N(v)| \cdot |N(v)|}_{\substack{> n^2/4 \\ \text{(nach (6))}}} \\
&\qquad (\text{laut Satz 1.2 } \textbf{(b)}\text{, angewandt auf } a = |V \setminus N(v)| \text{ und } b = |N(v)|) \\
&> 4 \cdot n^2/4 = n^2,
\end{aligned}$$

was absurd ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war; damit ist Beispiel 1.11 gelöst. □

(Obige Lösung stammt aus [Conlon11, Lecture 1, third proof of Theorem 1].)

Beispiel 1.12. Sei n eine positive ganze Zahl. In den n^2 Feldern eines $n \times n$-Schachbretts stehen Zahlen; und zwar steht jede der n Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in genau n Feldern.[4] Man zeige: Es gibt mindestens eine Zeile oder Spalte des Schachbretts, die mindestens $\sqrt{n}$ verschiedene Zahlen enthält.

Lösung zu Beispiel 1.12. Nehmen wir das Gegenteil an. Jede Zeile oder Spalte des Schachbretts enthält also $< \sqrt{n}$ verschiedene Zahlen. Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sei z_i die Anzahl aller verschiedenen Zahlen in der i-ten Zeile, und sei s_i die Anzahl aller verschiedenen Zahlen in der i-ten Spalte. Laut unserer Annahme ist also

$$z_i < \sqrt{n} \qquad \text{und} \qquad s_i < \sqrt{n} \tag{7}$$

für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sei z'_k die Anzahl aller Zeilen, die die Zahl k enthalten, und sei s'_k die Anzahl aller Spalten, die die Zahl k enthalten. Für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt dann

$$z'_k s'_k \geq n$$

(denn es gibt genau n Felder des Schachbretts, in denen die Zahl k steht, und jedes dieser n Felder liegt in einer der z'_k Zeilen, die k enthalten, und in einer der s'_k Spalten, die k enthalten; für so ein Feld gibt es aber nur $z'_k s'_k$ Möglichkeiten) und somit

$$\begin{aligned} z'_k + s'_k &\geq 2\sqrt{z'_k s'_k} && \left(\text{nach Satz 1.2 } \textbf{(c)}, \text{ angewandt auf } a = z'_k \text{ und } b = s'_k\right) \\ &\geq 2\sqrt{n} && \left(\text{denn } z'_k s'_k \geq n\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Nun gilt

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{k=1}^{n} z'_k \tag{9}$$

(denn auf beiden Seiten dieser Gleichung steht lediglich die Anzahl aller Paare $(i, k) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$ mit der Eigenschaft, dass die Zahl k in der i-ten Zeile vorkommt). Analogerweise gilt

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{k=1}^{n} s'_k. \tag{10}$$

[4] Hier ist ein Beispiel für ein solches Schachbrett im Fall von $n = 3$:

2	1	3
3	1	2
1	3	2

Addieren wir die Gleichungen (9) und (10), so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{k=1}^{n} z'_k + \sum_{k=1}^{n} s'_k = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(z'_k + s'_k\right)}_{\substack{\geq 2\sqrt{n} \\ \text{(nach (8))}}} \geq \sum_{k=1}^{n} 2\sqrt{n} = n \cdot 2\sqrt{n}.$$

Dies widerspricht aber

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{z_i}_{\substack{<\sqrt{n} \\ \text{(nach (7))}}} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{s_i}_{\substack{<\sqrt{n} \\ \text{(nach (7))}}} < \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{n}}_{=n\sqrt{n}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{n}}_{=n\sqrt{n}} = n\sqrt{n} + n\sqrt{n} = n \cdot 2\sqrt{n}.$$

Dieser Widerspruch ist genau das, was wir brauchen. Beispiel 1.12 ist damit gelöst. □

(Obige Lösung stammt aus `https://math.stackexchange.com/a/2950374/` .)

Aufgabe 6. Ein Graph G heiße *bipartierbar*, wenn sich seine Knotenmenge in zwei disjunkte Teilmengen A und B unterteilen läßt mit der Eigenschaft, dass jede Kante von G einen Endknoten in A und einen Endknoten in B hat. (Das Wort “unterteilen” bedeutet dabei, dass jeder Knoten in A oder in B liegt. Die Mengen A und B dürfen leer sein.)

Sei G ein schlichter ungerichteter Graph mit n Knoten und $n^2/4$ Kanten (wobei $n \in \mathbb{N}$). Angenommen, der Graph G hat keine drei Knoten a, b und c, die paarweise benachbart sind. Man zeige, dass G bipartierbar ist.

Aufgabe 7. Sei G ein Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E. Wir nehmen an, dass G keine Schlingen enthält.

Für jeden Knoten v von G sei der *Grad* von v definiert als die Anzahl aller Kanten, die v enthalten. Dieser Grad wird mit $\deg v$ bezeichnet.

Liegt ein Knoten v auf einer Kante e, dann bezeichnen wir mit e/v den von v verschiedenen Endknoten von e (oder v selber, wenn e eine Schlinge ist). Für jeden Knoten $v \in V$ definieren wir eine rationale Zahl q_v durch

$$q_v = \sum_{\substack{e \in E; \\ v \text{ liegt auf } e}} \frac{\deg (e/v)}{\deg v}.$$

(Der Nenner $\deg v$ ist hierbei von 0 verschieden, wann immer die Summe nichtleer ist.)

[Grob gesprochen ist q_v der durchschnittliche Grad der Nachbarn von v. Genauer gesagt wird der Durchschnitt hier nicht über die Nachbarn von v, sondern über die Kanten durch v gebildet; somit zählen einige Nachbarn mehrfach, falls es Mehrfachkanten gibt.]

Man zeige:

$$\sum_{v \in V} q_v \geq \sum_{v \in V} \deg v. \tag{11}$$

[Grob gesprochen: Der durchschnittliche Freund eines durchschnittlichen Social-Network-Users hat mehr Freunde als der User selber.]

Aufgabe 8. Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Sei S eine n-elementige Menge. Seien $S_1, S_2, \ldots, S_k$ beliebige Teilmengen von S. Man zeige, dass es zwei Zahlen $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ mit $i \neq j$ und $\left|S_i \setminus S_j\right| \leq \dfrac{nk}{4\,(k-1)}$ gibt.

Aufgabe 9. Verallgemeinere Beispiel 1.12 so weit wie möglich (z. B. auf rechteckige Matrizen, auf "3D-Matrizen", auf ungleichverteilt vorkommende Zahlen...).

1.3. AM und GM

Nach diesen Aufwärmübungen gehen wir nun zum Verallgemeinern von Satz 1.2 auf mehrere Zahlen über. Beginnen wir mit drei Zahlen:

Satz 1.13 (AM-GM-Ungleichung für drei Zahlen)**.** Seien a, b, c drei nichtnegative reelle Zahlen.

(a) Es gilt $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

(b) Es gilt $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

Beweis von Satz 1.13. **(a)** Durch stumpfes Ausrechnen prüft man leicht nach: Es gilt

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Wie man diese Gleichung nachrechnet, ist klar. Aber wie findet man sie? Dies ist weniger einfach. Es gibt Algorithmen, um beliebige Polynome mit rationalen Koeffizienten zu faktorisieren (siehe z. B. [Edward05, Essay 1.4] für einen solchen); man kann also einen Computer nach der Faktorisierung von $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ fragen und prompt die rechte Seite von (12) erhalten. Ohne Computer machen diese Algorithmen viel weniger Spaß (und auf einer IMO-Klausur verlangen sie wohl eine seltene Kombination aus Masochismus und Schnelligkeit). Daher können Tricks zum Faktorisieren von Polynomen immer noch nützlich sein, auch wenn sie nicht allgemein anwendbar sind. Insbesondere helfen folgende Tricks beim Finden von (12):

- Man kann feststellen, dass $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ gilt, wann immer $a + b + c = 0$ ist. (Dies folgt z. B. aus der binomischen Formel für $(a+b)^3$.) Dies suggeriert, dass $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ (als Polynom in den Variablen a, b, c betrachtet) durch $a +$

$b+c$ teilbar sein könnte. (Wenn man ein wenig Ringtheorie kennt, wird man sich hier das "könnte" sparen können; wenn ein Polynom $f(a,b,c)$ auf einer Ebene mit der Gleichung $ua+vb+wc=t$ (wobei u,v,w,t Konstanten sind) identisch verschwindet, dann muss das Polynom $f(a,b,c)$ durch $ua+vb+wc-t$ teilbar sein. Wenn man ein wenig algebraische Geometrie kennt, wird man dies sogar als Sonderfall des Hilbertschen Nullstellensatzes wiedererkennen (zumindest für komplexe Zahlen). Aber wir brauchen so etwas nicht zu wissen, um auf die richtige Idee zu kommen.)

Hat man nun den Verdacht, dass das Polynom $a^3+b^3+c^3-3abc$ durch $a+b+c$ teilbar sein könnte, dann kann man den Quotienten $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c}$ durch Polynomdivision finden (hierzu betrachte man b und c als Konstanten, sodass man zwei monische Polynome in a durcheinander dividieren muss).

- Alternativ kann man auch bemerken, dass das Polynom $a^3+b^3+c^3-3abc$ symmetrisch ist. Nun läßt sich bekanntlich jedes symmetrische Polynom in a,b,c als Polynom in den drei *elementarsymmetrischen Polynomen*

$$e_1 = a+b+c, \qquad e_2 = bc+ca+ab, \qquad e_3 = abc$$

ausdrücken. Hierfür gibt es Algorithmen (siehe z. B. [Brande05] oder [Bosch20, §4.3, Satz 5] oder [Kerber04, 8.5.5] oder [Lehn15, Satz 4.4] oder auch Aufgabe U.71 in math4u.de); diese führen auf

$$a^3+b^3+c^3-3abc = e_1^3 - 3e_1e_2.$$

An der rechten Seite hier sieht man sofort, dass e_1 sich ausklammern läßt. Man erhält also

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= e_1^3-3e_1e_2 = e_1\left(e_1^2-3e_2\right) \\ &= (a+b+c)\Big((a+b+c)^2-3(bc+ca+ab)\Big) \\ &= (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\right). \end{aligned}$$

Siehe [Jainta02] für einige weitere Anwendungen dieser Methode.

Aus (12) folgt nun

$$a^3+b^3+c^3-3abc = \underbrace{(a+b+c)}_{\geq 0}\underbrace{\Big(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\Big)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(wegen (1))}}} \geq 0.$$

Damit ist $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$. Also ist Satz 1.13 **(a)** bewiesen.

(b) Wenden wir Satz 1.13 **(a)** auf $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$ und $\sqrt[3]{c}$ statt a, b und c an, so erhalten wir:

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3+\left(\sqrt[3]{c}\right)^3 \geq 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c} = 3\sqrt[3]{abc}.$$

Dies vereinfacht sich zu $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dies beweist Satz 1.13 **(b)**. $\square$

Für vier Zahlen brauchen wir eine neue Idee:

Satz 1.14 (AM-GM-Ungleichung für vier Zahlen)**.** Seien a, b, c, d vier reelle Zahlen.

(a) Es gilt $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.

(b) Wenn a, b, c, d nichtnegativ sind, dann gilt $a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$.

Beweis von Satz 1.14. **(a)** Mit der Methode von Satz 1.13 **(a)** kommen wir hier nicht weiter; das Polynom $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd$ läßt sich nicht (nichttrivial) faktorisieren. Allerdings funktioniert hier eine "Divide-and-conquer"-Taktik, denn $4 = 2 \cdot 2$. Und zwar haben wir

$$\underbrace{a^4 + b^4}_{\substack{=\left(a^2\right)^2+\left(b^2\right)^2 \\ \geq 2a^2b^2 \\ \text{(nach Satz 1.2 } \textbf{(a)}\text{,} \\ \text{angewandt auf } a^2 \text{ und } b^2 \\ \text{statt } a \text{ und } b\text{)}}} + \underbrace{c^4 + d^4}_{\substack{=\left(c^2\right)^2+\left(d^2\right)^2 \\ \geq 2c^2d^2 \\ \text{(nach Satz 1.2 } \textbf{(a)}\text{,} \\ \text{angewandt auf } c^2 \text{ und } d^2 \\ \text{statt } a \text{ und } b\text{)}}} \geq 2a^2b^2 + 2c^2d^2 = 2 \underbrace{\left((ab)^2 + (cd)^2\right)}_{\substack{\geq 2abcd \\ \text{(nach Satz 1.2 } \textbf{(a)}\text{,} \\ \text{angewandt auf } ab \text{ und } cd \\ \text{statt } a \text{ und } b\text{)}}}$$
$$\geq 2 \cdot 2abcd = 4abcd.$$

Damit ist Satz 1.14 **(a)** bewiesen.

(b) Satz 1.14 **(b)** folgt aus Satz 1.14 **(a)** genauso, wie Satz 1.13 **(b)** aus Satz 1.13 **(a)** folgte. □

Der Leser mag sich überlegen, wieso es in Satz 1.13 **(a)** nötig war, die Nichtnegativität von a, b, c zu fordern, in Satz 1.14 **(a)** und Satz 1.2 **(a)** aber nicht. (Hinweis: Was ist der wichtigste Unterschied zwischen ungeraden und geraden Potenzen?) Sehen wir aber erst einmal von negativen Zahlen ab, dann sehen Satz 1.2 **(a)**, Satz 1.13 **(a)** und Satz 1.14 **(a)** wie die ersten Glieder einer Kette von Sätzen aus. So kann die Katze endlich aus dem Sack:

Satz 1.15 (AM-GM-Ungleichung für n Zahlen)**.** Sei n eine positive ganze Zahl. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige n nichtnegative reelle Zahlen.

(a) Es gilt $a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n \geq na_1a_2 \cdots a_n$.

(b) Es gilt $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2 \cdots a_n}$.

Beweis von Satz 1.15. Hier müssen wir erst einmal ausholen. Vergessen wir, dass wir n sowie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ fixiert haben. Wir beweisen Satz 1.15 **(a)** erst einmal in dem Fall, wenn n eine Zweierpotenz ist. Wir beweisen also folgendes:

Behauptung 1: Sei $m \in \mathbb{N}$. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_{2^m}$ beliebige 2^m reelle Zahlen. Dann gilt

$$a_1^{2^m} + a_2^{2^m} + \cdots + a_{2^m}^{2^m} \geq 2^m a_1a_2 \cdots a_{2^m}.$$

[*Beweis von Behauptung 1:* Dies ist im Wesentlichen die offensichtliche Verallgemeinerung von Satz 1.2 **(a)**. Hier der Beweis:

Wir verwenden Induktion nach m. Der *Induktionsanfang* ist der Fall $m = 0$; in diesem müssen wir zeigen, dass $a_1^1 \geq 1a_1$ gilt. Dies ist keine große Herausforderung. Kommen wir also zum *Induktionsschritt*: Sei $k \in \mathbb{N}$. Nehmen wir an, Behauptung 1 gelte für $m = k$. Wir müssen zeigen, dass Behauptung 1 auch für $m = k+1$ gilt. Seien also $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{k+1}}$ beliebige 2^{k+1} reelle Zahlen. Wir müssen zeigen, dass

$$a_1^{2^{k+1}} + a_2^{2^{k+1}} + \cdots + a_{2^{k+1}}^{2^{k+1}} \geq 2^{k+1} a_1 a_2 \cdots a_{2^{k+1}} \tag{13}$$

ist. Laut Induktionsannahme gilt Behauptung 1 für $m = k$; somit können wir Behauptung 1 auf k und a_i^2 statt m und a_i anwenden. Wir erhalten also

$$\left(a_1^2\right)^{2^k} + \left(a_2^2\right)^{2^k} + \cdots + \left(a_{2^k}^2\right)^{2^k} \geq 2^k a_1^2 a_2^2 \cdots a_{2^k}^2.$$

Mit anderen Worten:

$$a_1^{2^{k+1}} + a_2^{2^{k+1}} + \cdots + a_{2^k}^{2^{k+1}} \geq 2^k a_1^2 a_2^2 \cdots a_{2^k}^2$$

(denn für jedes i gilt $\left(a_i^2\right)^{2^k} = a_i^{2 \cdot 2^k} = a_i^{2^{k+1}}$). Das gleiche Argument (angewendet auf die 2^k Zahlen $a_{2^k+1}, a_{2^k+2}, \ldots, a_{2^{k+1}}$ statt den 2^k Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{2^k}$) ergibt

$$a_{2^k+1}^{2^{k+1}} + a_{2^k+2}^{2^{k+1}} + \cdots + a_{2^{k+1}}^{2^{k+1}} \geq 2^k a_{2^k+1}^2 a_{2^k+2}^2 \cdots a_{2^{k+1}}^2.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
&a_1^{2^{k+1}} + a_2^{2^{k+1}} + \cdots + a_{2^{k+1}}^{2^{k+1}} \\
&= \underbrace{\left(a_1^{2^{k+1}} + a_2^{2^{k+1}} + \cdots + a_{2^k}^{2^{k+1}}\right)}_{\geq 2^k a_1^2 a_2^2 \cdots a_{2^k}^2} + \underbrace{\left(a_{2^k+1}^{2^{k+1}} + a_{2^k+2}^{2^{k+1}} + \cdots + a_{2^{k+1}}^{2^{k+1}}\right)}_{\geq 2^k a_{2^k+1}^2 a_{2^k+2}^2 \cdots a_{2^{k+1}}^2} \\
&\geq 2^k a_1^2 a_2^2 \cdots a_{2^k}^2 + 2^k a_{2^k+1}^2 a_{2^k+2}^2 \cdots a_{2^{k+1}}^2 = 2^k \left(\underbrace{a_1^2 a_2^2 \cdots a_{2^k}^2}_{=\left(a_1 a_2 \cdots a_{2^k}\right)^2} + \underbrace{a_{2^k+1}^2 a_{2^k+2}^2 \cdots a_{2^{k+1}}^2}_{=\left(a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}\right)^2} \right) \\
&= 2^k \underbrace{\left(\left(a_1 a_2 \cdots a_{2^k}\right)^2 + \left(a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}\right)^2\right)}_{\substack{\geq 2\left(a_1 a_2 \cdots a_{2^k}\right) \cdot \left(a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}\right) \\ \text{(nach Satz 1.2 (a),} \\ \text{angewandt auf } a = a_1 a_2 \cdots a_{2^k} \\ \text{und } b = a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}})}} \\
&\geq \underbrace{2^k \cdot 2}_{=2^{k+1}} \underbrace{\left(a_1 a_2 \cdots a_{2^k}\right) \cdot \left(a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}\right)}_{=a_1 a_2 \cdots a_{2^{k+1}}} = 2^{k+1} a_1 a_2 \cdots a_{2^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Damit ist (13) gezeigt. Behauptung 1 gilt also für $m = k + 1$. Damit ist der Induktionsschritt vollendet, und Behauptung 1 ist bewiesen.]

Satz 1.15 **(b)** können wir für $n = 2^m$ nun ebenfalls herleiten:

> *Behauptung 2:* Sei $m \in \mathbb{N}$. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_{2^m}$ beliebige 2^m nichtnegative reelle Zahlen. Dann gilt
>
> $$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^m} \geq 2^m \sqrt[2^m]{a_1 a_2 \cdots a_{2^m}}.$$

[*Beweis von Behauptung 2:* Behauptung 1 (angewandt auf $\sqrt[2^m]{a_i}$ statt a_i) ergibt

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[2^m]{a_1}\right)^{2^m} + \left(\sqrt[2^m]{a_2}\right)^{2^m} + \cdots + \left(\sqrt[2^m]{a_{2^m}}\right)^{2^m} &\geq 2^m \sqrt[2^m]{\sqrt[2^m]{a_1}\sqrt[2^m]{a_2} \cdots \sqrt[2^m]{a_{2^m}}} \\ &= 2^m \sqrt[2^m]{a_1 a_2 \cdots a_{2^m}}. \end{aligned}$$

Da $\left(\sqrt[2^m]{a_i}\right)^{2^m} = a_i$ für jedes i gilt, vereinfacht sich dies zu

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^m} \geq 2^m \sqrt[2^m]{a_1 a_2 \cdots a_{2^m}}.$$

Behauptung 2 ist damit bewiesen.]

Nun kommen wir zum allgemeinen Beweis von Satz 1.15 **(b)** (woraus wir dann nachher Satz 1.15 **(a)** herleiten werden):

(b) Es gibt sicherlich eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $2^m \geq n$ (beispielsweise kann man $m = n$ nehmen, denn bekanntlich ist $2^n \geq n$). Betrachten wir eine solche Zahl m. Wir setzen $g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$. Wir erweitern nun unser n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zu einem 2^m-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_{2^m})$, indem wir

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{2^m} = g \tag{14}$$

setzen (dies ist legitim, denn $2^m \geq n$). Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{2^m}$ sind nichtnegative reelle Zahlen; laut Behauptung 2 gilt also

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^m} \geq 2^m \sqrt[2^m]{a_1 a_2 \cdots a_{2^m}}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^m} &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + \underbrace{(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2^m})}_{\substack{=(2^m - n)g \\ \text{(wegen (14))}}} \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (2^m - n)\, g \end{aligned}$$

und

$$a_1 a_2 \cdots a_{2^m} = \underbrace{(a_1 a_2 \cdots a_n)}_{\substack{=g^n \\ \text{(denn } \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = g)}} \underbrace{(a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{2^m})}_{\substack{=g^{2^m - n} \\ \text{(wegen (14))}}} = g^n g^{2^m - n} = g^{2^m}$$

vereinfacht sich dies zu

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (2^m - n)\, g \geq 2^m \underbrace{\sqrt[2^m]{g^{2^m}}}_{=g} = 2^m g.$$

Subtrahieren wir $(2^m - n)\, g$ von dieser Ungleichung, so erhalten wir

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq 2^m g - (2^m - n)\, g = n \underbrace{g}_{= \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} = n \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Satz 1.15 **(b)** ist damit bewiesen.

(a) Wenden wir Satz 1.15 **(b)** auf a_i^n statt a_i an, so erhalten wir

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n \geq n \underbrace{\sqrt[n]{a_1^n a_2^n \cdots a_n^n}}_{=a_1 a_2 \cdots a_n} = n a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Damit ist Satz 1.15 **(a)** bewiesen. □

Dieser Beweis verdient aufgrund seiner merkwürdigen Struktur einen Kommentar. Im Wesentlichen besteht die Idee darin, den Satz zuerst durch Induktion für alle Zweierpotenzen zu beweisen (also für $n = 2^m$), und dann durch "Rückwärtssprung" auf alle natürlichen Zahlen auszudehnen. Diese Argumentationsstruktur wird öfters *Cauchy-Induktion* genannt. Sie gehört nicht zu den häufigsten Beweismethoden, tritt aber immer wieder auf. Ein anderes Beispiel für ihre Anwendung ist BWM 2005/1/4.

Die Terminologie "AM-GM-Ungleichung" steht kurz für "Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel". Das *arithmetische Mittel* von n reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist definiert als $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$; das *geometrische Mittel* von n nichtnegativen reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist definiert als $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$. Satz 1.15 **(b)** sagt also aus, dass das arithmetische Mittel von n nichtnegativen reellen Zahlen mindestens so groß ist wie deren geometrisches Mittel. Die zwei bekanntesten Verallgemeinerungen von Satz 1.15 **(b)** sind die sogenannte *Potenzmittelungleichung* (auf Englisch "power means inequality", was auf seine eigene Weise zweideutig ist) und die sogenannte *gewichtete AM-GM-Ungleichung* (und noch allgemeiner gibt es die *gewichtete Potenzmittelungleichung*, die beide verallgemeinert). Aber bereits die AM-GM-Ungleichung hat viele (und oft unerwartete) Anwendungen:

Beispiel 1.16. Seien a, b, c drei positive reelle Zahlen mit $abc = 1$. Man zeige:

$$\frac{a-1}{b} + \frac{b-1}{c} + \frac{c-1}{a} \geq 0. \tag{15}$$

Lösung zu Beispiel 1.16. Die linke Seite der zu beweisenden Ungleichung (15) ist

$$\frac{a-1}{b}+\frac{b-1}{c}+\frac{c-1}{a}=\frac{1}{abc}\underbrace{\left(\left(a-1\right)ca+\left(b-1\right)ab+\left(c-1\right)bc\right)}_{=ab^2+bc^2+ca^2-bc-ca-ab}$$
$$=\frac{1}{abc}\left(ab^2+bc^2+ca^2-bc-ca-ab\right).$$

Also reicht es aus zu zeigen, dass $ab^2+bc^2+ca^2-bc-ca-ab\geq 0$ ist (denn abc ist ja positiv). Mit anderen Worten: Wir müssen zeigen, dass $ab^2+bc^2+ca^2\geq bc+ca+ab$ ist.

Dazu wenden wir Satz 1.13 **(b)** auf ab^2, bc^2 und bc^2 statt a, b und c an; dadurch erhalten wir

$$ab^2+bc^2+bc^2\geq 3\sqrt[3]{ab^2\cdot bc^2\cdot bc^2}=3\sqrt[3]{ab^4c^4}=3bc\underbrace{\sqrt[3]{abc}}_{\substack{=1\\ (\text{denn } abc=1)}}=3bc.$$

Zyklische Vertauschung der Variablen ergibt die analogen Ungleichungen

$$bc^2+ca^2+ca^2\geq 3ca \qquad \text{und}$$
$$ca^2+ab^2+ab^2\geq 3ab.$$

Addieren wir diese drei Ungleichungen auf, so erhalten wir

$$\left(ab^2+bc^2+bc^2\right)+\left(bc^2+ca^2+ca^2\right)+\left(ca^2+ab^2+ab^2\right)\geq 3bc+3ca+3ab.$$

Dies vereinfacht sich zu

$$3\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\geq 3\left(bc+ca+ab\right).$$

Dividieren wir diese Ungleichung durch 3, so erhalten wir $ab^2+bc^2+ca^2\geq bc+ca+ab$. Wie wir aber bereits gesehen haben, ist damit Beispiel 1.16 gelöst. □

Das nächste, recht skurrile Beispiel stammt aus [Hung07, Chapter 9, Problem 13]:

> **Beispiel 1.17.** Seien a,b,c,d nichtnegative reelle Zahlen. Man zeige:
>
> $$ab\left(b+c\right)+bc\left(c+d\right)+cd\left(d+a\right)+da\left(a+b\right)\leq\frac{4}{27}\left(a+b+c+d\right)^3.$$

Die Merkwürdigkeit dieser Ungleichung ist schon daran zu erkennen, dass die Gleichheit nicht etwa für $a=b=c=d$ eintritt, sondern im Fall, wenn das 4-Tupel (a,b,c,d) proportional zu einem der 4-Tupel $(1,2,0,0)$, $(0,1,2,0)$,

$(0,0,1,2)$ und $(2,0,0,1)$ ist. Wenn man dies frühzeitig erkennt, kann man möglicherweise einige Aufschlüsse über die möglichen Argumentationswege im Beweis der Ungleichung erhalten (so kann man z. B. nicht die Summe $a+b+c+d$ auf der rechten Seite durch ein $4\sqrt[4]{abcd}$ abschätzen, weil dies die Gleichheitsfälle zerstören würde). Aber auch nach solcher Vorarbeit wird folgende Lösung wohl einige Überraschungen bieten:

Lösung zu Beispiel 1.17. Die Ungleichung, die wir beweisen wollen, ist invariant gegenüber zyklischer Vertauschung der Variablen a,b,c,d; das heißt, wenn wir a,b,c,d durch b,c,d,a ersetzen, dann verändert sich die Ungleichung nicht.[5] Durch eine solche Vertauschung können wir aber erzielen, dass $b+d \leq a+c$ ist (denn eine solche Vertauschung vertauscht auch die Rollen von $a+c$ und $b+d$). Wir können also o. B. d. A. annehmen, dass $b+d \leq a+c$ gilt. Nehmen wir dies an.

Nun zeigt aber eine kurze Rechnung, dass

$$\begin{aligned}
&ab(b+c)+bc(c+d)+cd(d+a)+da(a+b)\\
&=(a+c)(bc+da)+\underbrace{(b+d)}_{\leq a+c}(ab+cd)\\
&\leq (a+c)(bc+da)+(a+c)(ab+cd)\\
&=(a+c)\underbrace{(bc+da+ab+cd)}_{\substack{=ab+bc+cd+da\\=(a+c)(b+d)}}\\
&=(a+c)(a+c)(b+d). \qquad (16)
\end{aligned}$$

(In dieser Rechnung sind einige interessante Tricks verborgen. Insbesondere ist es nicht verkehrt, sich die Faktorisierung $ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)$ zu merken!)

Nun ist aber

$$2(a+b+c+d)=(a+c)+(a+c)+2(b+d)\geq 3\sqrt[3]{(a+c)(a+c)\cdot 2(b+d)}$$

(nach Satz 1.13 **(b)**, angewandt auf $a+c$, $a+c$ und $2(b+d)$ statt a, b und c). Nehmen wir beide Seiten dieser Ungleichung in die dritte Potenz, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
(2(a+b+c+d))^3 &\geq \left(3\sqrt[3]{(a+c)(a+c)\cdot 2(b+d)}\right)^3\\
&=27(a+c)(a+c)\cdot 2(b+d)\\
&=2\cdot 27(a+c)(a+c)(b+d),
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
(a+c)(a+c)(b+d) &\leq \frac{1}{2\cdot 27}(2(a+b+c+d))^3\\
&=\frac{4}{27}(a+b+c+d)^3. \qquad (17)
\end{aligned}$$

[5] Sie verändert sich aber sehr wohl, wenn wir a,b,c,d (beispielsweise) durch b,a,c,d ersetzen.

Nun wird (16) zu

$$\begin{aligned} & ab\left(b+c\right)+bc\left(c+d\right)+cd\left(d+a\right)+da\left(a+b\right) \\ & \leq \left(a+c\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right) \leq \frac{4}{27}\left(a+b+c+d\right)^3 \qquad \text{(nach (17))}. \end{aligned}$$

Damit ist Beispiel 1.17 gelöst. □

Aufgabe 10. Seien a, b, c drei positive reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3.$$

Aufgabe 11. Seien a, b, c drei nichtnegative reelle Zahlen. Man beweise:

$$ab\left(b+c\right)+bc\left(c+a\right)+ca\left(a+b\right) \leq \frac{2}{9}\left(a+b+c\right)^3.$$

Aufgabe 12. Seien a, b, c, d, e, f sechs nichtnegative reelle Zahlen. Man beweise:

$$abc+bcd+cde+def+efa+fab \leq \frac{1}{27}\left(a+b+c+d+e+f\right)^3.$$

1.4. Youngs Ungleichung

Youngs Ungleichung (oder *Youngs Produktungleichung*) ist folgender Satz:

Satz 1.18 (Young–Ungleichung)**.** Seien a und b zwei nichtnegative reelle Zahlen. Seien p und q zwei positive reelle Zahlen mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Dann gilt

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Satz 1.2 **(a)** für nichtnegative Zahlen a und b ist der Sonderfall von Satz 1.18 für $p = 2$ und $q = 2$. Satz 1.18 ist also sozusagen eine "schiefe" ("biased") Version von Satz 1.2 **(a)**. ("Schief" in dem Sinne, dass a und b in verschiedenen Potenzen vorkommen.)

Wir beweisen Satz 1.18 im Falle von $p, q \in \mathbb{Q}$:

Proposition 1.19. Seien a und b zwei nichtnegative reelle Zahlen. Seien p und q zwei positive rationale Zahlen mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Beweis von Proposition 1.19. Die Zahl p ist positiv und rational; also ist auch ihr Kehrwert $\frac{1}{p}$ positiv und rational. Wir können also $\frac{1}{p}$ in der Form $\frac{1}{p} = \frac{k}{n}$ schreiben für zwei positive ganze Zahlen k und n. Betrachten wir diese Zahlen k und n.

Aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ erhalten wir $\frac{1}{q} = 1 - \underbrace{\frac{1}{p}}_{=\frac{k}{n}} = 1 - \frac{k}{n} = \frac{n-k}{n}$. Wir setzen $m = n - k$; dann ist m eine ganze Zahl (denn k und n sind ganz) und erfüllt $k + m = n$ (denn $m = n - k$). Ferner ist $\frac{1}{q} = \frac{n-k}{n} = \frac{m}{n}$ (denn $n - k = m$), also $m = \frac{n}{q} > 0$ (denn $n > 0$ und $q > 0$). Also ist m eine positive ganze Zahl.

Aus $\frac{1}{p} = \frac{k}{n}$ folgt $p = \frac{n}{k} = n/k$. Aus $\frac{1}{q} = \frac{m}{n}$ folgt $q = \frac{n}{m} = n/m$.

Seien $\alpha = a^{1/k}$ und $\beta = b^{1/m}$. Dies sind nichtnegative reelle Zahlen (denn a und b sind nichtnegative reelle Zahlen).

Nun definieren wir n nichtnegative reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ durch

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\underbrace{\alpha, \alpha, \ldots, \alpha}_{k \text{ mal}}, \underbrace{\beta, \beta, \ldots, \beta}_{m \text{ mal}} \right)$$

[6]. Dann ist also

$$\begin{aligned}
& a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n \\
&= \underbrace{\alpha^n + \alpha^n + \cdots + \alpha^n}_{k \text{ mal}} + \underbrace{\beta^n + \beta^n + \cdots + \beta^n}_{m \text{ mal}} = k\alpha^n + m\beta^n \\
&= \underbrace{k}_{\substack{=n/p \\ (\text{denn } p = n/k)}} \underbrace{\left(a^{1/k}\right)^n}_{\substack{=a^{(1/k)n}=a^p \\ (\text{denn } (1/k)n = n/k = p)}} + \underbrace{m}_{\substack{=n/q \\ (\text{denn } q = n/m)}} \underbrace{\left(b^{1/m}\right)^n}_{\substack{=b^{(1/m)n}=b^q \\ (\text{denn } (1/m)n = n/m = q)}} \\
& \qquad \left(\text{denn } \alpha = a^{1/k} \text{ und } \beta = b^{1/m}\right) \\
&= (n/p)\, a^p + (n/q)\, b^q = n\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)
\end{aligned} \tag{18}$$

und

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \underbrace{\alpha\alpha \cdots \alpha}_{k \text{ mal}} \underbrace{\beta\beta \cdots \beta}_{m \text{ mal}} = \underbrace{\alpha^k}_{\substack{=a \\ (\text{da } \alpha = a^{1/k})}} \underbrace{\beta^m}_{\substack{=b \\ (\text{da } \beta = b^{1/m})}} = ab. \tag{19}$$

Doch Satz 1.15 **(a)** ergibt $a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n \geq n a_1 a_2 \cdots a_n$. Wegen (18) und (19) können wir dies umschreiben als $n\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq nab$. Division durch n ergibt $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$. Damit ist Proposition 1.19 bewiesen. □

Satz 1.18 folgt aus Proposition 1.19 durch ein Stetigkeitsargument[7].

Die *Hölder-Ungleichung* verallgemeinert die Cauchy–Schwarz-Ungleichung ungefähr so, wie die Young-Ungleichung Satz 1.2 **(a)** verallgemeinert (aber wieder nur im Fall, wenn alle vorkommenden Zahlen nichtnegativ sind):

---

[6]Dies ist wohldefiniert, denn wegen $k + m = n$ ist $\left(\underbrace{\alpha, \alpha, \ldots, \alpha}_{k \text{ mal}}, \underbrace{\beta, \beta, \ldots, \beta}_{m \text{ mal}}\right)$ ein n-Tupel.

[7]In der Tat ist $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ eine stetige Funktion in p, wenn wir a und b festhalten und q durch $\frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$ ersetzt denken (denn die Bedingung $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ führt zu $q = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$). Da wir (aus Proposition 1.19) wissen, dass alle Werte dieser Funktion für rationales $p > 1$ nicht kleiner sind als ab, folgt dies aus der Stetigkeit also auch für alle Werte mit reellem $p > 1$. Wir überlassen die Details dem Leser, da wir uns für irrationale Exponenten hier nicht besonders interessieren.

Satz 1.20 (Hölder-Ungleichung)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sowie $b_1, b_2, \ldots, b_n$ nichtnegative reelle Zahlen. Seien p und q zwei positive reelle Zahlen mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p} \cdot \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Aufgabe 13. Man beweise Satz 1.20.
[**Hinweis:** Siehe Aufgabe 5 für den Fall $p = 2$ und $q = 2$.]

2. Cauchy–Schwarz (Kapitel im Entstehen)

2.1. Zwei neue Beweise

Die Cauchy–Schwarz-Ungleichung (Satz 1.10) haben wir bereits in Kapitel 1 gesehen. Jedoch gibt es viel mehr über sie zu sagen. In den meisten Büchern über Ungleichungen findet sich ein Kapitel über sie; auch ein ganzes Buch ([Steele04]) wurde schon über sie geschrieben. Wir werden im Folgenden einige ihrer Anwendungen und Varianten sehen.

Zunächst geben wir zwei weitere Beweise für sie. Erst einmal wollen wir ihre Behauptung noch einmal formulieren:

Satz 2.1 (Cauchy–Schwarz-Ungleichung)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sowie $b_1, b_2, \ldots, b_n$ beliebige reelle Zahlen. Dann gilt

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\right)^2.$$

Erster Beweis von Satz 2.1. (Wenn man den Beweis in Aufgabe 5 mitzählt, dann ist dies natürlich ein zweiter Beweis.) Der folgende Beweis stützt sich vor allem auf die Standard-Rechenregeln für Summationszeichen.

Sei $[n]$ die Menge $\{1,2,\ldots,n\}$. Dann ist

$$\underbrace{\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)}_{=\sum_{i\in[n]} a_i^2}\underbrace{\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)}_{=\sum_{j\in[n]} b_j^2}$$

$$= \left(\sum_{i\in[n]} a_i^2\right)\left(\sum_{j\in[n]} b_j^2\right) = \underbrace{\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in[n]}}_{=\sum_{(i,j)\in[n]^2}} a_i^2 b_j^2$$

$$= \sum_{(i,j)\in[n]^2} a_i^2b_j^2 = \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_i^2b_j^2 + \underbrace{\sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i=j}}}_{=\sum_{j\in[n]}\sum_{\substack{i\in[n];\\ i=j}}} a_i^2b_j^2 + \underbrace{\sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i>j}}}_{=\sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ j<i}}} a_i^2b_j^2$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{denn jedes Paar } (i,j)\in[n]^2 \text{ erfüllt genau eine}\\ \text{der drei Behauptungen } i<j,\ i=j \text{ und } i>j\end{array}\right)$$

$$= \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_i^2b_j^2 + \sum_{j\in[n]} \underbrace{\sum_{\substack{i\in[n];\\ i=j}} a_i^2b_j^2}_{\substack{=a_j^2b_j^2\\ \text{(denn diese Summe}\\ \text{hat nur einen Summanden,}\\ \text{nämlich den für } i=j)}} + \underbrace{\sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ j<i}} a_i^2b_j^2}_{\substack{=\sum_{\substack{(j,i)\in[n]^2;\\ i<j}} a_j^2b_i^2 \\ \text{(hier haben wir den}\\ \text{Summationsindex } (i,j)\\ \text{in } (j,i) \text{ umbenannt)}}}$$

$$= \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_i^2b_j^2 + \sum_{j\in[n]} a_j^2b_j^2 + \underbrace{\sum_{\substack{(j,i)\in[n]^2;\\ i<j}}}_{\substack{=\sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}}\\ \text{(denn die Abbildung von } [n]^2 \text{ nach } [n]^2,\\ \text{die jedes Paar } (i,j) \text{ nach } (j,i) \text{ sendet,}\\ \text{ist eine Bijektion)}}} a_j^2b_i^2$$

$$= \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_i^2b_j^2 + \sum_{j\in[n]} a_j^2b_j^2 + \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_j^2b_i^2$$

Andererseits ist

$$
\begin{aligned}
&(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \\
&= \underbrace{(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)}_{=\sum_{i\in[n]} a_ib_i} \underbrace{(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)}_{=\sum_{j\in[n]} a_jb_j} \\
&= \left(\sum_{i\in[n]} a_ib_i\right)\left(\sum_{j\in[n]} a_jb_j\right) = \underbrace{\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in[n]}}_{=\sum_{(i,j)\in[n]^2}} a_ib_ia_jb_j \\
&= \sum_{(i,j)\in[n]^2} a_ib_ia_jb_j = \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_ib_ia_jb_j + \underbrace{\sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i=j}}}_{=\sum_{j\in[n]}\sum_{\substack{i\in[n];\\ i=j}}} a_ib_ia_jb_j + \underbrace{\sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i>j}}}_{=\sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ j<i}}} a_ib_ia_jb_j \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn jedes Paar } (i,j)\in[n]^2 \text{ erfüllt genau eine}\\ \text{der drei Behauptungen } i<j,\ i=j \text{ und } i>j\end{array}\right) \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_ib_ia_jb_j + \sum_{j\in[n]} \underbrace{\sum_{\substack{i\in[n];\\ i=j}} a_ib_ia_jb_j}_{\substack{=a_jb_ja_jb_j\\ \text{(denn diese Summe}\\ \text{hat nur einen Summanden,}\\ \text{nämlich den für } i=j)}} + \underbrace{\sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ j<i}} a_ib_ia_jb_j}_{\substack{=\sum_{\substack{(j,i)\in[n]^2;\\ i<j}} a_jb_ja_ib_i\\ \text{(hier haben wir den}\\ \text{Summationsindex } (i,j)\\ \text{in } (j,i) \text{ umbenannt)}}} \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_ib_ia_jb_j + \sum_{j\in[n]} \underbrace{a_jb_ja_jb_j}_{=a_j^2b_j^2} + \underbrace{\sum_{\substack{(j,i)\in[n]^2;\\ i<j}}}_{\substack{=\sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}}\\ \text{(denn die Abbildung von } [n]^2 \text{ nach } [n]^2,\\ \text{die jedes Paar } (i,j) \text{ nach } (j,i) \text{ sendet,}\\ \text{ist eine Bijektion)}}} a_jb_ja_ib_i \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_ib_ia_jb_j + \sum_{j\in[n]} a_j^2b_j^2 + \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_jb_ja_ib_i.
\end{aligned}
$$

Subtrahieren wir letztere Gleichung von der ersteren, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \\
&= \left(\sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_i^2b_j^2 + \sum_{j\in[n]} a_j^2b_j^2 + \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_j^2b_i^2 \right) \\
&\qquad - \left(\sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_ib_ia_jb_j + \sum_{j\in[n]} a_j^2b_j^2 + \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_jb_ja_ib_i \right) \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_i^2b_j^2 + \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_j^2b_i^2 - \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_ib_ia_jb_j - \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} a_jb_ja_ib_i \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} \underbrace{\left(a_i^2b_j^2 + a_j^2b_i^2 - a_ib_ia_jb_j - a_jb_ja_ib_i\right)}_{\substack{=a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2-2a_ib_ja_jb_i\\ =\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2}} \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} \underbrace{\left(a_ib_j - a_jb_i\right)^2}_{\substack{\geq 0\\ \text{(nach Satz 1.1)}}} \geq \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2;\\ i<j}} 0 = 0.
\end{aligned}$$

Das heißt,

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 .$$

Damit ist Satz 2.1 bewiesen. □

TODO: fortsetzen...

3. Anhang: Die Summe der Minima ist $\leq$ dem Minimum der Summe

3.1. Das Prinzip

Die folgenden Argumente stammen aus dem Kvant-Artikel [AleKur91] von Alekseev und Kurlyandchik. Ich habe sie von Arthur Engel im IMO-Training ca. 2005 gelernt.

Wir beginnen mit zwei Definitionen:

Definition 3.1. Sei I eine beliebige Menge. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Die Funktion $f + g : I \to \mathbb{R}$ ist dann definiert als die Funktion von I nach $\mathbb{R}$, die jedes $x \in I$ auf $f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$ abbildet.

Definition 3.2. Sei I eine beliebige Menge. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Unter dem *Minimum* der Funktion f verstehen wir das kleinste Element der Bildmenge $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$, falls ein solches existiert. Dieses Minimum bezeichnen wir mit $\min f$.

Proposition 3.3. Sei I eine beliebige Menge. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Angenommen, die Minima $\min f$, $\min g$ und $\min(f+g)$ existieren. Dann gilt

$$\min f + \min g \leq \min(f+g).$$

Beweis von Proposition 3.3. Das Minimum einer Funktion ist offensichtlich ein Wert dieser Funktion. Somit ist $\min(f+g)$ ein Wert von $f+g$. Es gibt also ein $y \in I$ mit $\min(f+g) = (f+g)(y)$. Betrachten wir dieses y. Die Definition von $f+g$ ergibt $(f+g)(y) = f(y) + g(y)$.

Das Minimum $\min f$ ist $\leq$ als jeder Wert von f. Insbesondere gilt also $\min f \leq f(y)$. Analog gilt $\min g \leq g(y)$. Daher ist

$$\underbrace{\min f}_{\leq f(y)} + \underbrace{\min g}_{\leq g(y)} \leq f(y) + g(y) = (f+g)(y) = \min(f+g).$$

Damit ist Proposition 3.3 bewiesen. □

Proposition 3.3 läßt sich leicht auf beliebig viele Funktionen verallgemeinern:

Proposition 3.4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei I eine beliebige Menge. Seien $f_1, f_2, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ beliebige Funktionen. Angenommen, das Minimum $\min(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)$ existiert, und das Minimum $\min(f_i)$ existiert für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann gilt

$$\min(f_1) + \min(f_2) + \cdots + \min(f_n) \leq \min(f_1 + f_2 + \cdots + f_n). \tag{20}$$

Beweis von Proposition 3.4. Mancheiner würde hier gerne mit Induktion nach n argumentieren; dies wird jedoch dadurch vereitelt, dass die Funktionen $f_1 + f_2 + \cdots + f_k$ für $1 < k < n$ nicht notwendigerweise Minima haben. Daher arbeiten wir uns von vorne durch und dehnen einfach den obigen Beweis von Proposition 3.3 auf unsere Verallgemeinerung aus:

Das Minimum einer Funktion ist offensichtlich ein Wert dieser Funktion. Somit ist $\min(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)$ ein Wert von $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. Es gibt also ein $y \in I$ mit $\min(f_1 + f_2 + \cdots + f_n) = (f_1 + f_2 + \cdots + f_n)(y)$. Betrachten wir dieses y. Die Definition von $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ ergibt

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)(y) = f_1(y) + f_2(y) + \cdots + f_n(y).$$

(Genauer gesagt muss man dies durch Induktion nach n beweisen, denn wir haben in Definition 3.1 ja nur die Summe $f + g$ von zwei Funktionen und nicht direkt die Summe $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ von n Funktionen definiert. Aber der Beweis ist trivial.)

Nun ist

$$\begin{aligned}
&\min(f_1) + \min(f_2) + \cdots + \min(f_n) \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \qquad \underbrace{\min(f_i)}_{\leq f_i(y)}}_{\substack{\text{(denn das Minimum } \min(f_i) \text{ von } f_i \\ \text{ist } \leq \text{ als jeder Wert von } f_i)}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} f_i(y) = f_1(y) + f_2(y) + \cdots + f_n(y) = (f_1 + f_2 + \cdots + f_n)(y) \\
&= \min(f_1 + f_2 + \cdots + f_n).
\end{aligned} \tag{21}$$

Damit ist Proposition 3.4 bewiesen. □

Bemerkung 3.5. Die Ungleichung (20) in Proposition 3.4 wird genau dann zur Gleichheit, wenn es ein $x \in I$ gibt, welches $f_i(x) = \min(f_i)$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ erfüllt. Dies ist recht leicht einzusehen: Wenn es ein solches x gibt, dann erfüllt dieses x auch

$$\begin{aligned}
\min(f_1 + f_2 + \cdots + f_n) &\leq (f_1 + f_2 + \cdots + f_n)(x) \\
&= \underbrace{f_1(x)}_{=\min(f_1)} + \underbrace{f_2(x)}_{=\min(f_2)} + \cdots + \underbrace{f_n(x)}_{=\min(f_n)} \\
&= \min(f_1) + \min(f_2) + \cdots + \min(f_n),
\end{aligned}$$

und zusammen mit der Ungleichung (20) führt dies auf Gleichheit in (20). Umgekehrt: Wenn es **kein** solches x gibt, dann ist für jedes $y \in I$ mindestens eine der n Ungleichungen $\min(f_i) \leq f_i(y)$ (mit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) strikt, und somit kann das "$\leq$"-Zeichen in (21) durch ein "$<$"-Zeichen ersetzt werden; dies bedeutet, dass in (20) keine Gleichheit eintritt.

3.2. Cauchy–Schwarz in Engelform (aka Titus Lemma)

Genug der Allgemeinheiten; um aus obigen Propositionen etwas Nützliches zu erhalten, brauchen wir Funktionen, deren Minima wir tatsächlich ausrechnen können. Als erstes Beispiel werden wir uns quadratische Funktionen auf $\mathbb{R}$ dienen. Ihre Minima erhalten wir folgendermaßen:

Proposition 3.6. Seien a, b zwei reelle Zahlen mit $a > 0$. Sei $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion, die jedes $x \in \mathbb{R}$ auf $ax^2 + 2bx$ sendet. Dann existiert das Minimum der Funktion $f_{a,b}$, und es ist

$$\min\left(f_{a,b}\right) = \frac{-b^2}{a}. \tag{22}$$

Das Minimum der Funktion $f_{a,b}$ wird genau an der Stelle $-\frac{b}{a}$ erreicht (d.h., die einzige Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $f_{a,b}(x) = \min\left(f_{a,b}\right)$ ist $-\frac{b}{a}$).

Beweis von Proposition 3.6. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist

$$f_{a,b}(x) = ax^2 + 2bx = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{a}. \tag{23}$$

(Die letztere Gleichheit läßt sich leicht nachrechnen; es handelt sich aber einfach um die Scheitelform der Parabel $y = ax^2 + 2bx$.)

Aus der Gleichung (23) folgt

$$f_{a,b}(x) = a \underbrace{\left(x + \frac{b}{a}\right)^2}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(nach Satz 1.1)}}} - \frac{b^2}{a} \geq -\frac{b^2}{a}$$

(hier haben wir verwendet, dass $a > 0$ ist). In dieser Ungleichung tritt Gleichheit tatsächlich ein, wenn $x = -\frac{b}{a}$ ist (denn dann ist $x + \frac{b}{a} = 0$). Somit wissen wir, dass $f_{a,b}(x) \geq -\frac{b^2}{a}$ gilt, und Gleichheit hier genau dann eintritt, wenn $x = -\frac{b}{a}$ ist. Somit ist $-\frac{b^2}{a}$ das Minimum der Funktion $f_{a,b}$, und dieses Minimum wird genau an der Stelle $-\frac{b}{a}$ erreicht. Das heißt, das Minimum der Funktion $f_{a,b}$ existiert, und ist $\min\left(f_{a,b}\right) = -\frac{b^2}{a} = \frac{-b^2}{a}$, und wird genau an der Stelle $-\frac{b}{a}$ erreicht. Proposition 3.6 ist damit bewiesen. $\square$

Nun können wir Proposition 3.4 auf quadratische Funktionen anwenden, und erhalten folgendes:

Satz 3.7 (Cauchy–Schwarz-Ungleichung in Engelform, auch "Titus Lemma" genannt)**.** Sei n eine positive ganze Zahl. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige n positive reelle Zahlen. Seien $b_1, b_2, \ldots, b_n$ beliebige n reelle Zahlen. Dann gilt

$$\frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n^2}{a_n} \geq \frac{(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}. \tag{24}$$

Beweis von Satz 3.7. Für beliebige zwei reelle Zahlen a, b definieren wir $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als die Funktion, die jedes $x \in \mathbb{R}$ auf $ax^2 + 2bx$ sendet. Laut Proposition 3.6 hat jede solche Funktion $f_{a,b}$ mit positivem a ein Minimum. Insbesondere haben also die Funktionen f_{a_1,b_1}, f_{a_2,b_2}, ..., f_{a_n,b_n} sowie die Funktion $f_{a_1+a_2+\cdots+a_n, b_1+b_2+\cdots+b_n}$ Minima (denn die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und somit auch ihre Summe $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ sind positiv). Ferner gilt

$$f_{a_1+a_2+\cdots+a_n, b_1+b_2+\cdots+b_n} = f_{a_1,b_1} + f_{a_2,b_2} + \cdots + f_{a_n,b_n}, \tag{25}$$

denn für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
& f_{a_1+a_2+\cdots+a_n, b_1+b_2+\cdots+b_n}(x) \\
& = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) x^2 + 2 (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) x \\
& = \underbrace{\left(a_1 x^2 + 2b_1 x\right)}_{= f_{a_1,b_1}(x)} + \underbrace{\left(a_2 x^2 + 2b_2 x\right)}_{= f_{a_2,b_2}(x)} + \cdots + \underbrace{\left(a_n x^2 + 2b_n x\right)}_{= f_{a_n,b_n}(x)} \\
& = f_{a_1,b_1}(x) + f_{a_2,b_2}(x) + \cdots + f_{a_n,b_n}(x) \\
& = \left(f_{a_1,b_1} + f_{a_2,b_2} + \cdots + f_{a_n,b_n}\right)(x).
\end{aligned}$$

Proposition 3.4 (angewandt auf $f_i = f_{a_i,b_i}$) ergibt nun

$$\begin{aligned}
& \min\left(f_{a_1,b_1}\right) + \min\left(f_{a_2,b_2}\right) + \cdots + \min\left(f_{a_n,b_n}\right) \\
& \leq \min \underbrace{\left(f_{a_1,b_1} + f_{a_2,b_2} + \cdots + f_{a_n,b_n}\right)}_{\substack{= f_{a_1+a_2+\cdots+a_n, b_1+b_2+\cdots+b_n} \\ \text{(nach (25))}}} \\
& = \min\left(f_{a_1+a_2+\cdots+a_n, b_1+b_2+\cdots+b_n}\right) \\
& = \frac{-(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}
\end{aligned}$$

(laut Proposition 22, angewandt auf $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ und $b = b_1 + b_2 +$

$\cdots + b_n$). Also ist

$$\begin{aligned}
&\frac{-\left(b_1+b_2+\cdots+b_n\right)^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \\
&\geq \min\left(f_{a_1,b_1}\right)+\min\left(f_{a_2,b_2}\right)+\cdots+\min\left(f_{a_n,b_n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\min\left(f_{a_k,b_k}\right)}_{\substack{=\frac{-b_k^2}{a_k} \\ \text{(laut Proposition 22,} \\ \text{angewandt auf } a=a_k \text{ und } b=b_k)}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-b_k^2}{a_k}.
\end{aligned}$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Ungleichung mit -1, dann erhalten wir

$$\frac{\left(b_1+b_2+\cdots+b_n\right)^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq -\sum_{k=1}^{n} \frac{-b_k^2}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{a_k} = \frac{b_1^2}{a_1}+\frac{b_2^2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n^2}{a_n}.$$

Damit ist Satz 3.7 bewiesen. $\square$

Bemerkung 3.8. Die Ungleichung (24) in Satz 3.7 wird genau dann zur Gleichheit, wenn $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n}$ gilt. Dies kann der Leser nachprüfen; dazu muss er nur die letzte Aussage von Proposition 3.6 mit der Gleichheitsanalyse in Bemerkung 3.5 verknüpfen.

Satz 3.7 wird öfters *Titus Lemma* genannt (und von schreibfaulen IMO-Teilnehmern gerne *T2s Lemma* abgekürzt). Die altbekannte Cauchy–Schwarz-Ungleichung (Satz 2.1) läßt sich unschwer aus ihm herleiten:

Zweiter Beweis von Satz 2.1. Schritt 1: Wir nehmen o. B. d. A. an, dass $n \neq 0$ ist (denn sonst läuft Satz 2.1 auf $0 \geq 0$ hinaus).

Schritt 2: Nun beweisen wir Satz 2.1 in dem Fall, wenn die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von 0 verschieden sind.

In der Tat nehmen wir an, dass die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von 0 verschieden sind. Daher sind ihre Quadrate $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2$ positiv. Somit können wir Satz 3.7 auf a_i^2 und $a_i b_i$ statt a_i und b_i anwenden. Dadurch erhalten wir

$$\frac{\left(a_1 b_1\right)^2}{a_1^2}+\frac{\left(a_2 b_2\right)^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{\left(a_n b_n\right)^2}{a_n^2} \geq \frac{\left(a_1 b_1+a_2 b_2+\cdots+a_n b_n\right)^2}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung vereinfacht sich aber zu $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$. Somit wird die Ungleichung zu

$$b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2 \geq \frac{\left(a_1 b_1+a_2 b_2+\cdots+a_n b_n\right)^2}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit der (offensichtlich nichtnegativen) Zahl $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, so erhalten wir

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 .$$

Damit ist Satz 2.1 also bewiesen in dem Fall, wenn die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von 0 verschieden sind.

Schritt 3: Jetzt beweisen wir Satz 2.1 im allgemeinen Fall. Wir können dies auf zwei Wegen tun:

Erster Weg: Wir führen ein Stetigkeitsargument durch: In Schritt 2 haben wir bereits gezeigt, dass die Ungleichung

$$\begin{aligned}&\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)\\ &\geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2\end{aligned} \tag{26}$$

gilt, wenn die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von 0 verschieden sind. Wir wollen nun zeigen, dass sie auch allgemein gilt (also für beliebige $a_1, a_2, \ldots, a_n$).

Seien also $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige reelle Zahlen. Für jede hinreichend kleine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ sind dann die n Zahlen $a_1 + \varepsilon, a_2 + \varepsilon, \ldots, a_n + \varepsilon$ alle von 0 verschieden (warum?). Somit können wir die bereits bewiesene Ungleichung (26) auf $a_1 + \varepsilon, a_2 + \varepsilon, \ldots, a_n + \varepsilon$ statt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ anwenden (für hinreichend kleine reelle Zahlen $\varepsilon > 0$). Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}&\left((a_1+\varepsilon)^2 + (a_2+\varepsilon)^2 + \cdots + (a_n+\varepsilon)^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)\\ &\geq \left((a_1+\varepsilon)\, b_1 + (a_2+\varepsilon)\, b_2 + \cdots + (a_n+\varepsilon)\, b_n\right)^2\end{aligned}$$

für jede hinreichend kleine reelle Zahl $\varepsilon > 0$. Übergang zum Grenzwert ergibt also

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left((a_1+\varepsilon)^2 + (a_2+\varepsilon)^2 + \cdots + (a_n+\varepsilon)^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)\right)\\ &\geq \lim_{\varepsilon\to 0}\left((a_1+\varepsilon)\, b_1 + (a_2+\varepsilon)\, b_2 + \cdots + (a_n+\varepsilon)\, b_n\right)^2 .\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left((a_1+\varepsilon)^2 + (a_2+\varepsilon)^2 + \cdots + (a_n+\varepsilon)^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)\right)\\ &= \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)\end{aligned}$$

und

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left((a_1+\varepsilon)\, b_1 + (a_2+\varepsilon)\, b_2 + \cdots + (a_n+\varepsilon)\, b_n\right)^2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

vereinfacht sich dies zu

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 .$$

Somit haben wir Satz 2.1 auch im allgemeinen Fall bewiesen.[8]

Zweiter Weg: In Schritt 2 haben wir bereits gezeigt, dass die Ungleichung

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\right)^2 \tag{27}$$

gilt, wenn die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von 0 verschieden sind. Wir wollen nun zeigen, dass sie auch allgemein gilt (also für beliebige $a_1, a_2, \ldots, a_n$).

Seien also $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige reelle Zahlen. Seien $i_1, i_2, \ldots, i_k$ (mit $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$) alle diejenigen Elemente $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, die $a_i \neq 0$ erfüllen. Dann ist

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_{i_1}^2 + a_{i_2}^2 + \cdots + a_{i_k}^2 \tag{28}$$

(denn in der Summe $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ sind alle Summanden bis auf $a_{i_1}^2, a_{i_2}^2, \ldots, a_{i_k}^2$ gleich 0 und können daher weggelassen werden) und

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = a_{i_1} b_{i_1} + a_{i_2} b_{i_2} + \cdots + a_{i_k} b_{i_k} \tag{29}$$

(aus ähnlichen Gründen) und schließlich

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \geq b_{i_1}^2 + b_{i_2}^2 + \cdots + b_{i_k}^2 \tag{30}$$

(denn $b_{i_1}^2 + b_{i_2}^2 + \cdots + b_{i_k}^2$ ist eine Teilsumme der Summe $b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$, und alle in ihr nicht enthaltenen Summanden sind nach Satz 1.1 nichtnegativ). Wir können die Gleichung (28) mit der Ungleichung (30) multiplizieren (denn beide Seiten von (28) sind als Summen von Quadraten automatisch nichtnegativ); dadurch erhalten wir

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq \left(a_{i_1}^2 + a_{i_2}^2 + \cdots + a_{i_k}^2\right)\left(b_{i_1}^2 + b_{i_2}^2 + \cdots + b_{i_k}^2\right). \tag{31}$$

Doch die Zahlen $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ sind von 0 verschieden (denn laut Definition von $i_1, i_2, \ldots, i_k$ gilt $a_i \neq 0$ für jedes $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$). Daher können wir (27) auf k, $\left(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\right)$ und $\left(b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k}\right)$ statt n, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ anwenden. Wir erhalten somit

$$\left(a_{i_1}^2 + a_{i_2}^2 + \cdots + a_{i_k}^2\right)\left(b_{i_1}^2 + b_{i_2}^2 + \cdots + b_{i_k}^2\right) \geq a_{i_1} b_{i_1} + a_{i_2} b_{i_2} + \cdots + a_{i_k} b_{i_k}. \tag{32}$$

[8] Es sei darauf hingewiesen, dass dieses einfache Grenzwertargument leider einen beachtlichen Nachteil hat: Es sagt nichts über den Gleichheitsfall aus. In der Tat wird eine strikte Ungleichung der Form $f(\varepsilon) > g(\varepsilon)$ beim Grenzwertübergang nur zu einer nicht-strikten Ungleichung $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) \geq \lim\limits_{\varepsilon \to 0} g(\varepsilon)$; dies macht es unmöglich, den Gleichheitsfall (wie in Bemerkung 1.9) durch den Beweis nachzuzeichnen.

Aus (31) wird daher

$$\begin{aligned}
&\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \\
&\geq \left(a_{i_1}^2 + a_{i_2}^2 + \cdots + a_{i_k}^2\right)\left(b_{i_1}^2 + b_{i_2}^2 + \cdots + b_{i_k}^2\right) \\
&\geq a_{i_1}b_{i_1} + a_{i_2}b_{i_2} + \cdots + a_{i_k}b_{i_k} \qquad \text{(wegen (32))} \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \qquad \text{(wegen (29))}\,.
\end{aligned}$$

Somit haben wir Satz 2.1 auch im allgemeinen Fall bewiesen. □

Auch die Hölder-Ungleichung (Satz 1.20) läßt sich aus Proposition 3.4 herleiten ([AleKur91]):

Aufgabe 14. Beweise Satz 1.20 mithilfe von Proposition 3.4.
[Hinweis: Sei $\mathbb{R}_+ := \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\}$. Sei I die Menge aller Paare $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ mit $xy = 1$. (Dies ist ein Ast der Standardhyperbel $xy = 1$.) Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sei $f_i : I \to \mathbb{R}$ die Funktion, die jedes Paar $(x, y) \in I$ auf $\dfrac{a_i^p x^p}{p} + \dfrac{b_i^q y^q}{q}$ abbildet. Zeige mithilfe der Young–Ungleichung, dass $\min(f_i) = a_i b_i$ ist. Was ist $\min(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)$, und was folgt hieraus nach Proposition 3.4?]

Hier noch ein paar weitere Aufgaben:

Aufgabe 15. Verallgemeinere Proposition 3.4 durch Ersetzen von Minima durch Infima.
(Einige Details: Ist S eine Menge von reellen Zahlen, dann ist das *Infimum* von S definiert als die größte reelle Zahl, die kleiner oder gleich allen Elementen von S ist (falls eine solche Zahl denn existiert). Dieses Infimum wird mit $\inf S$ bezeichnet. Beispielsweise ist $\inf\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} = 0$. Unter dem *Infimum* einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ verstehen wir das Infimum der Bildmenge $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$, falls ein solches existiert. Dieses Infimum bezeichnen wir mit $\inf f$. Nun soll Proposition 3.4 verallgemeinert werden, indem jedes Vorkommen von "Minimum" oder "min" durch "Infimum" bzw. "inf" ersetzt wird.)

4. Lösungen und Lösungshinweise

Im Folgenden zeige ich Lösungen zu den oben gestellten Aufgaben.

4.1. zu Kapitel 1

4.1.1. zu Aufgabe 1

Lösung zu Aufgabe 1. **(a)** Wir haben

$$2\left(a^2+b^2\right) = a^2+b^2+\underbrace{\left(a^2+b^2\right)}_{\substack{\geq 2ab \\ \text{(nach Satz 1.2 (a))}}} \geq a^2+b^2+2ab = (a+b)^2 .$$

Damit ist Aufgabe 1 **(a)** gelöst.

(b) Wir nehmen an, dass $ab \geq 0$ ist oder m ungerade ist. Dann ist also $(ab)^{m-1} \geq 0$ (denn wenn $ab \geq 0$ ist, dann ist dies offensichtlich; sonst ist aber m ungerade, und somit $m-1$ gerade, und daher gilt wieder $(ab)^{m-1} \geq 0$).

Nach Satz 1.2 **(a)** gilt aber $a^2+b^2 \geq 2ab$. Multiplizieren wir beide Seiten dieser Ungleichung mit $(ab)^{m-1}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (ab)^{m-1}\left(a^2+b^2\right) &\geq (ab)^{m-1}\cdot 2ab \qquad \left(\text{denn } (ab)^{m-1}\geq 0\right) \\ &= 2\underbrace{(ab)^{m-1}ab}_{=(ab)^m=a^mb^m} = 2a^mb^m. \end{aligned} \tag{33}$$

Wir haben $p_{m+1} = a^{m+1}+b^{m+1}$ (nach Definition von p_{m+1}) und $p_{m-1} = a^{m-1}+b^{m-1}$ (analog). Multiplizieren wir diese zwei Gleichungen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} p_{m+1}p_{m-1} &= \left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)\left(a^{m-1}+b^{m-1}\right) \\ &= \underbrace{a^{m+1}a^{m-1}}_{=a^{2m}} + \underbrace{a^{m+1}b^{m-1}}_{=(ab)^{m-1}a^2} + \underbrace{a^{m-1}b^{m+1}}_{=(ab)^{m-1}b^2} + \underbrace{b^{m+1}b^{m-1}}_{=b^{2m}} \\ &= \underbrace{a^{2m}}_{=(a^m)^2} + \underbrace{(ab)^{m-1}a^2+(ab)^{m-1}b^2}_{\substack{=(ab)^{m-1}\left(a^2+b^2\right) \\ \geq 2a^mb^m \\ \text{(nach (33))}}} + \underbrace{b^{2m}}_{=(b^m)^2} \\ &\geq (a^m)^2+2a^mb^m+(b^m)^2 = (a^m+b^m)^2 = p_m^2 \end{aligned}$$

(denn die Definition von p_m ergibt $p_m = a^m+b^m$). Damit ist Aufgabe 1 **(b)** gelöst. □

4.1.2. zu Aufgabe 2

Lösung zu Aufgabe 2. **(a)** Eine einfache Rechnung ergibt

$$\begin{aligned}&3\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left((b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right)\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2\geq 0\end{aligned}$$

(nach Satz 1.1, angewandt auf $x=a+b+c$). Hieraus folgt $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq\left((b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right)$. Dadurch ist Aufgabe 2 **(a)** gelöst.

(b) Beispiel 1.3 (angewendet auf bc, ca, ab statt a, b, c) ergibt

$$(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2\geq ca\cdot ab+ab\cdot bc+bc\cdot ca.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2&=(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2\geq ca\cdot ab+ab\cdot bc+bc\cdot ca\\&=a^2bc+ab^2c+abc^2=abc\,(a+b+c)\,.\end{aligned}$$

Dadurch ist Aufgabe 2 **(b)** gelöst. □

4.1.3. zu Aufgabe 3

Lösung zu Aufgabe 3. **(a)** Eine kurze Rechnung ergibt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(a+b+c+d)^2-((a+c)(b+d)+2(ac+bd))\\&=\frac{1}{2}\left(\underbrace{a^2+c^2}_{\substack{\geq 2ac\\ \text{(nach Satz 1.2,}\\ \text{angewandt auf } c \text{ statt } a)}}+\underbrace{b^2+d^2}_{\substack{\geq 2bd\\ \text{(nach Satz 1.2,}\\ \text{angewandt auf } b \text{ und } d\\ \text{statt } a \text{ und } b)}}\right)-ac-bd\\&\geq\frac{1}{2}(2ac+2bd)-ac-bd=0.\end{aligned}$$

Also ist $\frac{1}{2}(a+b+c+d)^2\geq(a+c)(b+d)+2(ac+bd)$. Damit ist Aufgabe 3 **(a)** gelöst.

(b) *Erste Lösung zu Aufgabe 3* ***(b)**:* Aufgabe 3 **(a)** ergibt

$$\frac{1}{2}(a+b+c+d)^2\geq(a+c)(b+d)+2(ac+bd)\,. \tag{34}$$

Allerdings gilt auch

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a+b+c+d)^2&=\frac{1}{2}(a+c+b+d)^2\\&\geq(a+b)(c+d)+2(ab+cd)\end{aligned} \tag{35}$$

(laut Aufgabe 3 **(a)**, angewandt auf c und b statt b und c) und

$$\frac{1}{2}(a+b+c+d)^2 = \frac{1}{2}(a+b+d+c)^2 \geq (a+d)(b+c) + 2(ad+bc) \tag{36}$$

(laut Aufgabe 3 **(a)**, angewandt auf d und c statt c und d).

Nun wollen wir die drei Ungleichungen (34), (35) und (36) zusammenaddieren. Wir erhalten auf diese Weise

$$\frac{1}{2}(a+b+c+d)^2 + \frac{1}{2}(a+b+c+d)^2 + \frac{1}{2}(a+b+c+d)^2 \geq ((a+c)(b+d) + 2(ac+bd)) + ((a+b)(c+d) + 2(ab+cd)) + ((a+d)(b+c) + 2(ad+bc)).$$

Diese Ungleichung vereinfacht sich schnell zu

$$\frac{3}{2}(a+b+c+d)^2 \geq 4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

(denn ihre linke Seite ist $\frac{3}{2}(a+b+c+d)^2$, und ihre rechte Seite ist $4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$). Multiplizieren wir beide Seiten mit 2, so erhalten wir schließlich

$$3(a+b+c+d)^2 \geq 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

Damit ist Aufgabe 3 **(b)** gelöst.

Zweite Lösung zu Aufgabe 3 ***(b)****:* Eine kurze Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} &3(a+b+c+d)^2 - 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \\ &= \underbrace{(a-b)^2}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(nach Satz 1.1)}}} + \underbrace{(a-c)^2}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(nach Satz 1.1)}}} + \underbrace{(a-d)^2}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(nach Satz 1.1)}}} + \underbrace{(b-c)^2}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(nach Satz 1.1)}}} + \underbrace{(b-d)^2}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(nach Satz 1.1)}}} + \underbrace{(c-d)^2}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(nach Satz 1.1)}}} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

also $3(a+b+c+d)^2 \geq 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$. Damit ist Aufgabe 3 **(b)** gelöst. □

4.1.4. zu Aufgabe 4

Lösung zu Aufgabe 4. Wir äffen im Wesentlichen unseren Beweis von Beispiel 1.7 nach. Wir setzen also

$$x_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n \tag{37}$$

für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Damit haben wir n positive reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definiert. Ferner setzen wir

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{38}$$

Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt also

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n)}_{\substack{=x_i \\ \text{(nach (37))}}} + a_i$$
$$= x_i + a_i$$

und damit

$$a_i = s - x_i. \tag{39}$$

Weiterhin ist

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_i}_{\substack{=s-x_i \\ \text{(nach (39))}}} = \sum_{i=1}^{n} (s - x_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} s}_{=ns} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{=\sum_{j=1}^{n} x_j} = ns - \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Aus (38) folgt also

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = ns - \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Daher ist

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = ns - s = (n-1)\, s.$$

Wir können diese Gleichung nach s auflösen (denn $n \geq 2 > 1$ und damit $n - 1 \neq 0$), und erhalten

$$s = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} x_j. \tag{40}$$

Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt nun

$$\frac{a_i}{x_i} = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n} \qquad \text{(nach (37))}$$

und damit

$$\begin{aligned}
&\frac{a_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n} \\
&= \frac{a_i}{x_i} = \frac{s - x_i}{x_i} \qquad \text{(nach (39))} \\
&= \frac{s}{x_i} - 1 = s \cdot \frac{1}{x_i} - 1 = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} x_j \right) \cdot \frac{1}{x_i} - 1 \qquad \text{(nach (40))} \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{x_j \cdot \frac{1}{x_i}}_{=\frac{x_j}{x_i}} -1 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} - 1. \qquad (41)
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{a_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n}}_{\substack{=\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} - 1 \\ \text{(by (41))}}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} - 1 \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{=n} \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} - n. \qquad (42)
\end{aligned}$$

Nun werden wir zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} \geq n^2 \qquad (43)$$

gilt. Dazu wenden wir den "Kleiner-Gauss"-Trick an: Wir haben

$$\begin{aligned}
2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{x_i}}_{=\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{x_i}}_{\substack{=\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_j} \\ \text{(hier haben wir die} \\ \text{Summationsindizes } i \text{ und } j \\ \text{in } j \text{ und } i \text{ unbenannt)}}} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_j}{x_i} + \frac{x_i}{x_j} \right). \qquad (44)
\end{aligned}$$

Doch $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind positive reelle Zahlen. Für beliebige Elemente i und j von $\{1, 2, \ldots, n\}$ gilt also

$$\frac{x_j}{x_i} + \frac{x_i}{x_j} \geq 2 \qquad (45)$$

(nach Satz 1.2 **(d)**, angewandt auf $a = x_j$ und $b = x_i$). Somit wird (44) zu

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{x_j}{x_i} + \frac{x_i}{x_j} \right)}_{\substack{\geq 2 \\ \text{(nach (45))}}} \geq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2}_{=n\cdot 2=2n} = \sum_{j=1}^{n} 2n = n \cdot 2n = 2n^2.$$

Dividieren wir diese Ungleichung durch 2, so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} \geq n^2. \qquad (46)$$

Damit wird (42) zu

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n} = \frac{1}{n-1} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{x_i}}_{\substack{\geq n^2 \\ \text{(nach (46))}}} - n \\
&\geq \frac{1}{n-1} n^2 - n \qquad \left(\text{denn } \frac{1}{n-1} \geq 0 \right) \\
&= \frac{n}{n-1}.
\end{aligned}$$

Damit ist Aufgabe 4 gelöst. □

4.1.5. zu Aufgabe 5

Lösung zu Aufgabe 5. Wir wollen Satz 1.10 beweisen. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sowie $b_1, b_2, \ldots, b_n$ beliebige reelle Zahlen.

Wir definieren zwei nichtnegative reelle Zahlen

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \qquad \text{und} \qquad B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

(Diese zwei Quadratwurzeln sind wohldefiniert, denn wegen Satz 1.1 sind $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ und $b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$ nichtnegativ.) Nach der Definition von A gilt $A^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$. Nach der Definition von B gilt $B^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$. Nun ist

$$\begin{aligned}
&2A^2B^2 \\
&= \underbrace{A^2}_{=\sum_{i=1}^{n} a_i^2} B^2 + \underbrace{B^2}_{=\sum_{i=1}^{n} b_i^2} A^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 B^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 A^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{a_i^2 B^2}_{=(a_iB)^2} + \underbrace{b_i^2 A^2}_{=(b_iA)^2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left((a_iB)^2 + (b_iA)^2 \right)}_{\substack{\geq 2a_iBb_iA \\ \text{(nach Satz 1.2 (a),} \\ \text{angewandt auf } a_iB \text{ und } b_iA \\ \text{statt } a \text{ und } b)}} \geq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{2a_iBb_iA}_{=2ABa_ib_i} = \sum_{i=1}^{n} 2ABa_ib_i = 2AB \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.
\end{aligned}$$

Dividieren wir diese Ungleichung durch 2, so erhalten wir

$$A^2B^2 \geq AB \sum_{i=1}^{n} a_ib_i. \tag{47}$$

Nun wäre es gut, wenn wir diese Ungleichung durch AB teilen und quadrieren könnten. Leider ist dies beides nicht ganz einfach: Die Division kann schieflaufen, wenn $AB = 0$ ist, und das Quadrieren könnte theoretisch die Ungleichung verletzen, wenn die rechte Seite negativ ist. Diese beiden Hindernisse werden wir nun umschiffen.

Dazu fassen wir erst einmal als Lemma zusammen, was wir bereits gezeigt haben:

Lemma 4.1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sowie $b_1, b_2, \ldots, b_n$ beliebige reelle Zahlen. Seien $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ und $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$. Dann gilt

$$A^2B^2 \geq AB \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

Hieraus erhalten wir unschwer folgenden Sonderfall von Satz 1.10:

Lemma 4.2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sowie $b_1, b_2, \ldots, b_n$ beliebige reelle Zahlen. Angenommen, es gilt $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i > 0$. Dann ist

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\right)^2.$$

Beweis von Lemma 4.2. Wir definieren zwei nichtnegative reelle Zahlen

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \qquad \text{und} \qquad B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

(Wie schon oben gezeigt, sind diese beiden Quadratwurzeln wohldefiniert.) Laut Annahme ist $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i > 0$. Also sind **nicht** alle n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gleich 0 (denn sonst wäre $a_i = 0$ für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, woraus wir $\sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{a_i}_{=0} b_i = \sum\limits_{i=1}^{n} 0 b_i = 0$ erhalten würden, was im Widerspruch zu $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i > 0$ stünde). Folglich ist A positiv[9]. Aus analogen Gründen ist B positiv. Somit ist auch das Produkt AB positiv. Nach Lemma 4.1 gilt aber

$$A^2 B^2 \geq AB \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Wir können diese Ungleichung durch AB dividieren (denn AB ist positiv), und erhalten

$$AB \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Wegen $AB > 0$ (denn AB ist positiv) und $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i > 0$ können wir diese Ungleichung quadrieren, und erhalten somit

$$(AB)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2.$$

[9]*Beweis:* Die n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind reell, und (laut einer der zwei Annahmen, die wir gerade gemacht haben) nicht alle gleich 0. Ihre Quadrate $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2$ sind somit nichtnegativ (nach Satz 1.1), und nicht alle gleich 0. Die Summe $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ dieser Quadrate ist also positiv (denn die Summanden dieser Summe sind nichtnegativ und nicht alle gleich 0; daher ist mindestens einer der Summanden positiv). Somit ist auch ihre Quadratwurzel $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ positiv. Das heißt, A ist positiv (denn $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$).

Wegen

$$\begin{aligned}(AB)^2 &= \underbrace{A^2}_{\substack{=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \\ \text{(nach Definition von } A)}} \underbrace{B^2}_{\substack{=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2 \\ \text{(nach Definition von } B)}} \\ &= \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)\end{aligned}$$

und $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$ läßt sich dies umschreiben als

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 .$$

Damit ist Lemma 4.2 bewiesen. □

Nun beweisen wir Satz 1.10 endlich in seiner allgemeinen Form:

Beweis von Satz 1.10. Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

Fall 1: Es gilt $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i > 0$.

Fall 2: Es gilt $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$.

Fall 3: Es gilt $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i < 0$.

In Fall 1 folgt Satz 1.10 aus Lemma 4.2. Wir müssen also nur die anderen beiden Fälle untersuchen.

Betrachten wir nun Fall 2. In diesem Fall ist $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$. Also ist $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$ und somit

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 = 0^2 = 0. \tag{48}$$

Aus Satz 1.1 folgen aber schnell die zwei Ungleichungen $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$ und $b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \geq 0$. Multiplizieren wir sie, so erhalten wir

$$\begin{aligned}&\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \\ &\geq 0 = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \qquad \text{(nach (48))} .\end{aligned}$$

Damit ist Satz 1.10 in Fall 2 bewiesen.

Schließlich betrachten wir Fall 3. In diesem Fall ist $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i < 0$. Also ist $\sum_{i=1}^{n} (-a_i)\, b_i = -\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}_{<0} > 0$. Also können wir Lemma 4.2 auf $-a_i$ statt a_i anwenden. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}&\left((-a_1)^2 + (-a_2)^2 + \cdots + (-a_n)^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)\\ &\geq \left((-a_1)\, b_1 + (-a_2)\, b_2 + \cdots + (-a_n)\, b_n\right)^2 .\end{aligned}$$

Wegen

$$\underbrace{(-a_1)^2}_{=a_1^2} + \underbrace{(-a_2)^2}_{=a_2^2} + \cdots + \underbrace{(-a_n)^2}_{=a_n^2} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

und

$$\begin{aligned}\left(\underbrace{(-a_1)\, b_1 + (-a_2)\, b_2 + \cdots + (-a_n)\, b_n}_{=-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)}\right)^2 &= \left(-\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)\right)^2\\ &= \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)^2\end{aligned}$$

vereinfacht sich dies zu

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)^2 .$$

Damit ist Satz 1.10 in Fall 3 bewiesen.

Wir haben damit Satz 1.10 in allen drei Fällen bewiesen; also gilt Satz 1.10 immer. □

Aufgabe 5 ist damit endlich gelöst. □

4.1.6. zu Aufgabe 6

Lösungsskizze zu Aufgabe 6. Dies ist im Wesentlichen eine Analyse des Gleichheitsfalls in Beispiel 1.11. Wir werden also weitgehend wie in der Lösung von Beispiel 1.11 verfahren.

Für jeden Knoten v von G sei $N(v)$ die Menge aller zu v benachbarten Knoten von G. Sei V die Menge aller Knoten von G. Dann ist also $|V| = n$ (denn G hat n Knoten). Wir müssen zeigen, dass G bipartierbar ist. Wenn $V = \varnothing$ ist, dann ist dies trivial; wir nehmen also o. B. d. A. an, dass $V \neq \varnothing$ ist. Wir wählen nun einen Knoten v von G, für den $|N(v)|$ maximal ist. (Dies ist möglich, denn $V \neq \varnothing$.) Dann gilt also

$$|N(x)| \leq |N(v)| \qquad \text{für jeden Knoten } x \in V. \tag{49}$$

Eine Kante von G heiße *gut*, wenn sie durch **genau** einen Knoten $x \in V \setminus N(v)$ verläuft; sonst heiße sie *schlecht*. Wie in der Lösung von Beispiel 1.11 sehen wir nun, dass jede Kante von G durch mindestens einen Knoten $x \in$

$V \setminus N(v)$ verläuft. Jede schlechte Kante von G verläuft also durch **zwei** Knoten $x \in V \setminus N(v)$. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{x \in V \setminus N(v)} (\text{Anzahl aller Kanten von } G\text{, die durch } x \text{ verlaufen}) \\
&= (\text{Anzahl aller guten Kanten von } G) \\
&\qquad + 2 \cdot (\text{Anzahl aller schlechten Kanten von } G)\,.
\end{aligned} \tag{50}$$

Wir werden nun zeigen, dass jede Kante von G gut ist.

[*Beweis:* Nehmen wir das Gegenteil an. Dann hat G also mindestens eine schlechte Kante. Das heißt,

$$(\text{Anzahl aller schlechten Kanten von } G) > 0$$

und damit

$$\begin{aligned}
&2 \cdot (\text{Anzahl aller schlechten Kanten von } G) \\
&> (\text{Anzahl aller schlechten Kanten von } G)\,.
\end{aligned}$$

Aus (50) wird somit

$$\begin{aligned}
&\sum_{x \in V \setminus N(v)} (\text{Anzahl aller Kanten von } G\text{, die durch } x \text{ verlaufen}) \\
&= (\text{Anzahl aller guten Kanten von } G) \\
&\qquad + \underbrace{2 \cdot (\text{Anzahl aller schlechten Kanten von } G)}_{> (\text{Anzahl aller schlechten Kanten von } G)} \\
&> (\text{Anzahl aller guten Kanten von } G) + (\text{Anzahl aller schlechten Kanten von } G) \\
&= (\text{Anzahl aller Kanten von } G)\,.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
&(\text{Anzahl aller Kanten von } G) \\
&< \sum_{x \in V \setminus N(v)} \underbrace{(\text{Anzahl aller Kanten von } G\text{, die durch } x \text{ verlaufen})}_{= (\text{Anzahl aller Nachbarn von } x) = |N(x)|} \\
&= \sum_{x \in V \setminus N(v)} \underbrace{|N(x)|}_{\substack{\leq |N(v)| \\ (\text{nach } (49))}} \leq \sum_{x \in V \setminus N(v)} |N(v)| = |V \setminus N(v)| \cdot |N(v)|\,,
\end{aligned}$$

also

$$|V \setminus N(v)| \cdot |N(v)| > (\text{Anzahl aller Kanten von } G) = n^2/4 \tag{51}$$

(denn G hat genau $n^2/4$ Kanten). Doch wegen $N(v) \subseteq V$ gilt $|V \setminus N(v)| = |V| - |N(v)|$ und somit $|V \setminus N(v)| + |N(v)| = |V| = n$. Also ist $n = |V \setminus N(v)| +$

$|N(v)|$, daher

$$n^2 = (|V \setminus N(v)| + |N(v)|)^2 \geq 4 \cdot \underbrace{|V \setminus N(v)| \cdot |N(v)|}_{\substack{>n^2/4 \\ \text{(nach (6))}}}$$

$$\text{(laut Satz 1.2 } \textbf{(b)}\text{, angewandt auf } a = |V \setminus N(v)| \text{ und } b = |N(v)|)$$

$$> 4 \cdot n^2/4 = n^2,$$

was absurd ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war. Damit ist gezeigt, dass jede Kante von G gut ist.]

Wir wissen nun, dass jede Kante von G gut ist. Das heißt: Jede Kante von G verläuft durch **genau** einen Knoten $x \in V \setminus N(v)$ (denn so haben wir "gute Kanten" ja definiert). Mit anderen Worten: Jede Kante von G hat einen Endknoten in $V \setminus N(v)$ und einen Endknoten in $N(v)$ (denn ein Knoten, der nicht in $V \setminus N(v)$ liegt, muss natürlich in $N(v)$ liegen). Somit läßt sich die Knotenmenge V des Graphen G unterteilen in zwei disjunkte Teilmengen A und B mit der Eigenschaft, dass jede Kante von G einen Endknoten in A und einen Endknoten in B hat (nämlich $A = V \setminus N(v)$ und $B = N(v)$). Das heißt, der Graph G ist bipartierbar (nach der Definition von "bipartierbar"). Damit ist Aufgabe 6 gelöst. □

Eine stärkere Version von Aufgabe 6 wurde in [Rollin16, problem 1] bewiesen: Und zwar lassen sich die Worte "$n^2/4$ Kanten" in der Aufgabe durch "mehr als $(n-1)^2/4+1$ Kanten" ersetzen. (Die obige Lösung von Aufgabe 6 ist aber für diese stärkere Version nicht mehr geeignet.)

4.1.7. zu Aufgabe 7

Lösung zu Aufgabe 7. Wir haben

$$q_v = \sum_{\substack{e \in E; \\ v \text{ liegt auf } e}} \frac{\deg(e/v)}{\deg v} \qquad \text{für jeden Knoten } v \in V$$

(nach Definition von q_v). Addieren wir diese Gleichungen für alle $v \in V$ zusammen, so erhalten wir

$$\sum_{v \in V} q_v = \underbrace{\sum_{v \in V} \sum_{\substack{e \in E; \\ v \text{ liegt auf } e}}}_{= \sum_{e \in E} \sum_{\substack{v \in V; \\ v \text{ liegt auf } e}}} \frac{\deg(e/v)}{\deg v}$$

$$= \sum_{e \in E} \sum_{\substack{v \in V; \\ v \text{ liegt auf } e}} \frac{\deg(e/v)}{\deg v}. \tag{52}$$

Doch für jede Kante $e \in E$ gilt

$$\sum_{\substack{v \in V;\\ v \text{ liegt auf } e}} \frac{\deg(e/v)}{\deg v} \geq 2. \tag{53}$$

[*Beweis von (53):* Sei e eine Kante. Seien p und q die zwei Endknoten von e. Dann gilt $e/p = q$ und $e/q = p$. Ferner liegt der Knoten p auf mindestens einer Kante (denn p liegt auf der Kante e); somit ist $\deg p \geq 1 > 0$. Das heißt, $\deg p$ ist positiv. Analog sehen wir, dass $\deg q$ positiv ist.

Nun gibt es aber genau zwei Knoten $v \in V$, die auf e liegen – nämlich p und q (denn p und q sind die zwei Endknoten von e). Also ist

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{v \in V;\\ v \text{ liegt auf } e}} \frac{\deg(e/v)}{\deg v} &= \frac{\deg(e/p)}{\deg p} + \frac{\deg(e/q)}{\deg q} \\
&= \frac{\deg q}{\deg p} + \frac{\deg p}{\deg q} \qquad \text{(denn } e/p = q \text{ und } e/q = p\text{)} \\
&\geq 2
\end{aligned}$$

(nach Satz 1.2 **(d)**, angewandt auf $a = \deg q$ und $b = \deg p$). Damit ist (53) bewiesen.]

Nun wird (52) zu

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V} q_v &= \sum_{e \in E} \underbrace{\sum_{\substack{v \in V;\\ v \text{ liegt auf } e}} \frac{\deg(e/v)}{\deg v}}_{\substack{\geq 2\\ \text{(nach (53))}}} \geq \sum_{e \in E} 2 \\
&= |E| \cdot 2 = 2\,|E|\,.
\end{aligned} \tag{54}$$

Für jeden Knoten v gilt aber

$$\begin{aligned}
\deg v &= (\text{der Grad von } v) = (\text{die Anzahl aller Kanten, die } v \text{ enthalten}) \\
&\qquad (\text{laut der Definition des Grades von } v) \\
&= \sum_{\substack{e \in E;\\ v \text{ liegt auf } e}} 1
\end{aligned}$$

(denn

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{e \in E;\\ v \text{ liegt auf } e}} 1 &= (\text{die Anzahl aller } e \in E \text{ mit der Eigenschaft, dass } v \text{ auf } e \text{ liegt}) \cdot 1 \\
&= (\text{die Anzahl aller } e \in E \text{ mit der Eigenschaft, dass } v \text{ auf } e \text{ liegt}) \\
&= (\text{die Anzahl aller Kanten } e \in E, \text{ auf denen } v \text{ liegt}) \\
&= (\text{die Anzahl aller Kanten, die } v \text{ enthalten})
\end{aligned}$$

). Addieren wir diese Gleichungen für alle $v \in V$ zusammen, so erhalten wir

$$\sum_{v \in V} \deg v = \underbrace{\sum_{v \in V} \sum_{\substack{e \in E; \\ v \text{ liegt auf } e}}}_{= \sum\limits_{e \in E} \sum\limits_{\substack{v \in V; \\ v \text{ liegt auf } e}}} 1 = \sum_{e \in E} \underbrace{\sum_{\substack{v \in V; \\ v \text{ liegt auf } e}} 1}_{\substack{=1+1 \\ \text{(denn es gibt genau zwei} \\ \text{Knoten } v \in V \text{, die auf } e \text{ liegen} \\ \text{(denn die Kante } e \text{ verbindet} \\ \text{genau zwei Knoten))}}}$$

$$= \sum_{e \in E} \underbrace{(1+1)}_{=2} = \sum_{e \in E} 2 = |E| \cdot 2 = 2\,|E|\,.$$

Somit können wir (54) folgendermaßen umschreiben:

$$\sum_{v \in V} q_v \geq \sum_{v \in V} \deg v.$$

Damit ist (11) bewiesen. Das heißt, Aufgabe 7 ist gelöst. □

4.1.8. zu Aufgabe 8

Lösung zu Aufgabe 8. Wir haben $|S| = n$ (denn S ist eine n-elementige Menge).

Sei K die Menge $\{1, 2, \ldots, k\}$. Dann ist $|K| = k$. Nun erinnern wir uns aber: Die Mengen $S_1, S_2, \ldots, S_k$ sind Teilmengen von S. Das heißt, für jedes $i \in K$ ist S_i eine Teilmenge von S (denn $K = \{1, 2, \ldots, k\}$).

Wir definieren ein *gutes Tripel* als ein Tripel (s, i, j) mit $s \in S$ und $i, j \in K$ und $s \in S_i \setminus S_j$. Wir behaupten nun folgendes: Für jedes $s \in S$ gilt

$$\begin{aligned} &(\text{die Anzahl aller guten Tripel, deren erster Eintrag } s \text{ ist}) \\ &\leq \frac{k^2}{4}. \end{aligned} \tag{55}$$

[*Beweis von (55):* Sei $s \in S$. Sei A die Menge aller $i \in K$, die $s \in S_i$ erfüllen. Sei B die Menge aller $i \in K$, die $s \notin S_i$ erfüllen. Jedes $i \in K$ erfüllt entweder $s \in S_i$ oder $s \notin S_i$. Mit anderen Worten: Jedes $i \in K$ erfüllt entweder $i \in A$ oder $i \in B$ (nach den Definitionen von A und B). Also ist $A \cup B = K$ (denn A und B sind Teilmengen von K); hieraus folgt $|A \cup B| = |K| = k$. Ferner sind die Mengen A und B disjunkt (denn ein $i \in K$ kann nicht gleichzeitig $s \in S_i$ und $s \notin S_i$ erfüllen). Also gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$, und daher $|A| + |B| = |A \cup B| = k$. Aus Satz 1.2 **(b)** (angewandt auf $a = |A|$ und $b = |B|$) folgt also $(|A| + |B|)^2 \geq 4 \cdot |A| \cdot |B|$ (denn $|A|$ und $|B|$ sind nichtnegativ). Wegen $|A| + |B| = k$ vereinfacht sich dies zu $k^2 \geq 4 \cdot |A| \cdot |B|$. Das heißt, $|A| \cdot |B| \leq \dfrac{k^2}{4}$.

Nun betrachten wir die guten Tripel, deren erster Eintrag s ist. Diese guten Tripel haben die Form (s, i, j), wobei i und j zwei Elemente von K sind, die $s \in S_i \setminus S_j$ erfüllen. Die Anzahl dieser guten Tripel ist also gleich der Anzahl aller Paare (i,j) von zwei Elementen von K, die $s \in S_i \setminus S_j$ erfüllen. Das heißt, wir haben

$$\begin{aligned}
&(\text{die Anzahl aller guten Tripel, deren erster Eintrag } s \text{ ist}) \\
&= \left(\text{die Anzahl aller Paare } (i,j) \in K^2 \text{ mit } s \in S_i \setminus S_j\right) \\
&= \left(\text{die Anzahl aller Paare } (i,j) \in K^2 \text{ mit } s \in S_i \text{ und } s \notin S_j\right) \\
&\qquad\qquad \left(\text{denn die Aussage ``} s \in S_i \setminus S_j \text{'' ist äquivalent zu ``} s \in S_i \text{ und } s \notin S_j \text{''}\right) \\
&= \left(\text{die Anzahl aller Paare } (i,j) \in K^2 \text{ mit } i \in A \text{ und } j \in B\right) \\
&\qquad\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn die Aussage ``} s \in S_i \text{'' ist äquivalent zu ``} i \in A \text{'' (wegen der} \\ \text{Definition von } A\text{), und die Aussage ``} s \notin S_j \text{'' ist} \\ \text{äquivalent zu ``} j \in B \text{'' (wegen der Definition von } B\text{)}\end{array}\right) \\
&= (\text{die Anzahl aller Paare } (i,j) \in A \times B) \\
&\qquad\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn die Paare } (i,j) \in K^2 \text{ mit } i \in A \text{ und } j \in B \\ \text{sind genau die Paare } (i,j) \in A \times B \text{ (weil } A \text{ und } B \text{ Teilmengen} \\ \text{von } K \text{ sind)}\end{array}\right) \\
&= |A \times B| = |A| \cdot |B| \leq \frac{k^2}{4}.
\end{aligned}$$

Damit ist (55) bewiesen.]

Wir wollen nun die Anzahl aller guten Tripel auf zweierlei Weisen zählen.

Zum einen wissen wir: Jedes gute Tripel hat die Form (s,i,j) für ein $s \in S$ (und zwei weitere Einträge i und j, die uns gerade nicht interessieren). Also ist

$$\begin{aligned}
&(\text{die Anzahl aller guten Tripel}) \\
&= \sum_{s \in S} \underbrace{(\text{die Anzahl aller guten Tripel, deren erster Eintrag } s \text{ ist})}_{\substack{\leq \frac{k^2}{4} \\ \text{(nach (55))}}} \\
&\leq \sum_{s \in S} \frac{k^2}{4} = \underbrace{|S|}_{=n} \cdot \frac{k^2}{4} = n \cdot \frac{k^2}{4}.
\end{aligned} \tag{56}$$

Zum anderen wissen wir aber: Jedes gute Tripel hat die Form (s,i,j) für ein Paar $(i,j) \in K^2$ und ein Element $s \in S$. Das Paar (i,j) muss dabei $i \neq j$

erfüllen[10]. Also ist

$$\begin{aligned}
&(\text{die Anzahl aller guten Tripel}) \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in K^2;\\ i\neq j}} \underbrace{(\text{die Anzahl aller guten Tripel, deren letzte zwei Einträge } i \text{ und } j \text{ sind})}_{\substack{=(\text{die Anzahl aller } s\in S \text{, für die } (s,i,j) \text{ ein gutes Tripel ist})\\ =(\text{die Anzahl aller } s\in S \text{, die } s\in S_i\setminus S_j \text{ erfüllen})\\ (\text{denn das Tripel } (s,i,j) \text{ für ein } s\in S \text{ ist genau dann ein gutes Tripel,}\\ \text{wenn } s\in S_i\setminus S_j \text{ erfüllt ist})}} \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in K^2;\\ i\neq j}} \underbrace{(\text{die Anzahl aller } s\in S \text{, die } s\in S_i\setminus S_j \text{ erfüllen})}_{\substack{=|S_i\setminus S_j|\\ (\text{denn } S_i\setminus S_j \text{ ist eine Teilmenge von } S)}} \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in K^2;\\ i\neq j}} \left|S_i\setminus S_j\right|.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{(i,j)\in K^2;\\ i\neq j}} \left|S_i\setminus S_j\right| &= (\text{die Anzahl aller guten Tripel}) \\
&\leq n\cdot\frac{k^2}{4} \qquad (57)
\end{aligned}$$

(nach (56)).

Nun müssen wir zeigen, dass es zwei Zahlen $i,j\in\{1,2,\ldots,k\}$ mit $i\neq j$ und $\left|S_i\setminus S_j\right| \leq \frac{nk}{4(k-1)}$ gibt. Dies beweisen wir durch Widerspruch: Wir nehmen also an, es gäbe keine zwei solche Zahlen. Für je zwei Zahlen $i,j\in\{1,2,\ldots,k\}$ mit $i\neq j$ muss also

$$\left|S_i\setminus S_j\right| > \frac{nk}{4(k-1)}$$

gelten. Mit anderen Worten: Für je zwei Zahlen $i,j\in K$ mit $i\neq j$ muss

$$\left|S_i\setminus S_j\right| > \frac{nk}{4(k-1)} \qquad (58)$$

gelten (denn $K=\{1,2,\ldots,k\}$).

Die Anzahl aller Paare $(i,j)\in K^2$ ist $\left|K^2\right| = |K|^2 = k^2$ (denn $|K|=k$). Daher gibt es genau k^2-k Paare $(i,j)\in K^2$, die $i\neq j$ erfüllen (denn die Anzahl **aller**

[10] *Beweis:* Sei (s,i,j) ein gutes Tripel. Wir müssen zeigen, dass $i\neq j$ gilt.

In der Tat nehmen wir das Gegenteil an. Dann ist also $i=j$. Aber da (s,i,j) ein gutes Tripel ist, gilt $s\in S_i\setminus S_j$ (nach der Definition eines "guten Tripels"). Wegen $i=j$ ist aber $S_i\setminus S_j = S_j\setminus S_j = \varnothing$. Folglich ist $s\in S_i\setminus S_j=\varnothing$, was aber absurd ist (denn die leere Menge hat kein Element). Damit haben wir einen Widerspruch erhalten. Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war. Damit ist $i\neq j$ bewiesen (wie gewünscht).

Paare $(i,j) \in K^2$ ist k^2, und aus diesen k^2 Paaren müssen die k Paare (i,j) mit $i = j$ herausgezählt werden). Das heißt,

$$\left|\left\{(i,j) \in K^2 \mid i \neq j\right\}\right| = k^2 - k.$$

Also ist

$$\left|\left\{(i,j) \in K^2 \mid i \neq j\right\}\right| = k^2 - k = \underbrace{k}_{\geq 2 > 0} \underbrace{(k-1)}_{\substack{>0 \\ (\text{denn } k \geq 2 > 1)}} > 0. \tag{59}$$

Das heißt, die Menge $\left\{(i,j) \in K^2 \mid i \neq j\right\}$ ist nichtleer. Folglich ist[11]

$$\sum_{\substack{(i,j) \in K^2; \\ i \neq j}} \underbrace{\left|S_i \setminus S_j\right|}_{\substack{> \frac{nk}{4(k-1)} \\ (\text{nach } (58))}} > \sum_{\substack{(i,j) \in K^2; \\ i \neq j}} \frac{nk}{4(k-1)} = \underbrace{\left|\left\{(i,j) \in K^2 \mid i \neq j\right\}\right|}_{\substack{= k(k-1) \\ (\text{nach } (59))}} \cdot \frac{nk}{4(k-1)}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{denn } \sum\limits_{t \in T} c = |T| \cdot c \text{ für jede endliche Menge } T \\ \text{und jede Zahl } c \end{array}\right)$$

$$= k(k-1) \cdot \frac{nk}{4(k-1)} = n \cdot \frac{k^2}{4}.$$

Dies widerspricht aber (57). Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war. Somit haben wir gezeigt, dass es zwei Zahlen $i, j \in K$ mit $i \neq j$ und $\left|S_i \setminus S_j\right| \leq \dfrac{nk}{4(k-1)}$ gibt. Aufgabe 8 ist damit gelöst. $\square$

4.1.9. zu Aufgabe 9

Lösung zu Aufgabe 9. Folgende Verallgemeinerung von Beispiel 1.12 wurde von David Schmitz vorgeschlagen:

---

[11] Wir werden hier gleich die Tatsache benutzen, dass eine **nichtleere** Summe von strikten Ungleichungen wieder eine strikte Ungleichung ist. Das heißt, wir werden folgendes Lemma benutzen:

> *Lemma:* Sei T eine **nichtleere** Menge. Für jedes $t \in T$ seien a_t und b_t zwei reelle Zahlen, die $a_t > b_t$ erfüllen. Dann gilt $\sum\limits_{t \in T} a_t > \sum\limits_{t \in T} b_t$.

Man beachte, dass hier T als nichtleer vorausgesetzt wird; sonst gilt nämlich $\sum\limits_{t \in T} a_t = \sum\limits_{t \in T} b_t$ (weil beide Seiten als leere Summen gleich 0 sind).

In unserem Fall werden wir das Lemma auf die nichtleere Menge $T = \left\{(i,j) \in K^2 \mid i \neq j\right\}$ und auf die Elemente $a_{(i,j)} = \left|S_i \setminus S_j\right|$ und $b_{(i,j)} = \dfrac{nk}{4(k-1)}$ anwenden. (Dass die Menge $\left\{(i,j) \in K^2 \mid i \neq j\right\}$ dabei tatsächlich nichtleer ist, haben wir vorhin gezeigt.)

Satz 4.3. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Sei d eine positive ganze Zahl. Seien $X_1, X_2, \ldots, X_d$ beliebige endliche Mengen. Sei $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_d$. Für jedes d-Tupel $x \in X$ und jedes $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ werden wir den i-ten Eintrag von x mit x_i bezeichnen. (Es gilt also $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ für jedes $x \in X$.)

Sei $f : X \to \{1, 2, \ldots, n\}$ eine beliebige Abbildung. Für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sei a_j die Anzahl aller $x \in X$, die $f(x) = j$ erfüllen. Sei

$$C = \frac{d\left(\sqrt[d]{a_1} + \sqrt[d]{a_2} + \cdots + \sqrt[d]{a_n}\right)}{|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_d|}.$$

(Wir nehmen an, dass der Nenner hier von 0 verschieden ist.) Dann gibt es ein $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ und ein $z \in X_i$ mit der Eigenschaft, dass

$$|\{f(x) \mid x \in X \text{ und } x_i = z\}| \geq C$$

gilt (d.h. mit der Eigenschaft, dass die Abbildung f auf der Menge aller $x \in X$ mit $x_i = z$ mindestens C verschiedene Werte annimmt).

Bevor wir Satz 4.3 beweisen, sind ein paar Worte zu seiner Bedeutung angesagt, um eine Intuition für seine Aussage zu vermitteln. Wir betrachten den Fall, wenn jede der d Mengen X_i die Form $X_i = \{1, 2, \ldots, m_i\}$ für ein $m_i \in \mathbb{N}$ hat. (Dieser Fall ist de-facto der Allgemeinfall, denn wir können die Elemente von X_i beliebig umbenennen, und auf diese Weise erreichen wir, dass X_i tatsächlich diese Form hat.) Die Menge $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_d$ kann man sich dann als ein “d-dimensionales verallgemeinertes Schachbrett” vorstellen, das die Form eines Hyperquaders hat (mit Kantenlängen $m_1, m_2, \ldots, m_d$). Dieses verallgemeinerte Schachbrett ist in $1 \times 1 \times \cdots \times 1$-Hyperwürfel unterteilt, die wir die *Felder* dieses Schachbretts nennen. Eine Abbildung $f : X \to \{1, 2, \ldots, n\}$ können wir uns also vorstellen als eine Möglichkeit, Zahlen zwischen 1 und n in diese Felder einzutragen (jeweils genau eine Zahl pro Feld). Für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ist dann a_j die Anzahl aller Felder, deren Eintrag j ist. Die Behauptung von Satz 4.3 ist dann, dass es mindestens eine “Hyperzeile” des verallgemeinerten Schachbretts (d. h. einen Querschnitt mit einer achsenparallelen Hyperbene) gibt, die mindestens C verschiedene Zahlen enthält. (Im Falle von $d = 2$ sind solche “Hyperzeilen” genau die Zeilen und die Spalten des Schachbretts.)

Beweis von Satz 4.3. Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ und jedes $z \in X_i$ sei

$$p_{i,z} = |\{f(x) \mid x \in X \text{ und } x_i = z\}|. \tag{60}$$

Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ und jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sei

$$q_{i,k} = |\{x_i \mid x \in X \text{ und } f(x) = k\}|. \tag{61}$$

Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ gilt dann

$$\sum_{z \in X_i} p_{i,z} = \sum_{k=1}^{n} q_{i,k}. \tag{62}$$

[*Beweis von (62):* Sei $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ beliebig.

Ein Paar $(z, k) \in X_i \times \{1, 2, \ldots, n\}$ heiße ein *F-Paar*, wenn es ein $x \in X$ gibt, das $x_i = z$ und $f(x) = k$ erfüllt. Wie viele F-Paare gibt es? Einerseits ist der erste Eintrag eines jeden F-Paares ein Element z von X_i. Somit ist

$$\begin{aligned}&(\text{die Anzahl aller F-Paare})\\&= \sum_{z \in X_i} (\text{die Anzahl aller F-Paare, deren erster Eintrag } z \text{ ist}).\end{aligned} \tag{63}$$

Doch für jedes $z \in X_i$ ist

$$\begin{aligned}&(\text{die Anzahl aller F-Paare, deren erster Eintrag } z \text{ ist})\\&= (\text{die Anzahl aller } k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \text{ für die } (z, k) \text{ ein F-Paar ist})\\&= (\text{die Anzahl aller } k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \text{ die die}\\&\qquad \text{Form } k = f(x) \text{ für ein } x \in X \text{ mit } x_i = z \text{ haben})\\&\qquad\qquad (\text{nach der Definition eines F-Paares})\\&= |\{f(x) \mid x \in X \text{ und } x_i = z\}|\\&= p_{i,z} \qquad (\text{nach (60)}).\end{aligned} \tag{64}$$

Damit wird (63) zu

$$\begin{aligned}&(\text{die Anzahl aller F-Paare})\\&= \sum_{z \in X_i} \underbrace{(\text{die Anzahl aller F-Paare, deren erster Eintrag } z \text{ ist})}_{\substack{= p_{i,z}\\ (\text{nach (64)})}}\\&= \sum_{z \in X_i} p_{i,z}.\end{aligned} \tag{65}$$

Andererseits ist der zweite Eintrag eines jeden F-Paares ein Element k von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Somit ist

$$\begin{aligned}&(\text{die Anzahl aller F-Paare})\\&= \sum_{k=1}^{n} (\text{die Anzahl aller F-Paare, deren zweiter Eintrag } k \text{ ist}).\end{aligned} \tag{66}$$

Doch für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ist

$$\begin{aligned}&(\text{die Anzahl aller F-Paare, deren zweiter Eintrag } k \text{ ist})\\&= (\text{die Anzahl aller } z \in X_i, \text{ für die } (z, k) \text{ ein F-Paar ist})\\&= (\text{die Anzahl aller } z \in X_i, \text{ die die}\\&\qquad \text{Form } z = x_i \text{ für ein } x \in X \text{ mit } f(x) = k \text{ haben})\\&\qquad\qquad (\text{nach der Definition eines F-Paares})\\&= |\{x_i \mid x \in X \text{ und } f(x) = k\}|\\&= q_{i,k} \qquad (\text{nach (61)}).\end{aligned} \tag{67}$$

Damit wird (66) zu

$$\begin{aligned}
&\left(\text{die Anzahl aller F-Paare}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\text{die Anzahl aller F-Paare, deren zweiter Eintrag } k \text{ ist}\right)}_{\substack{=q_{i,k}\\ \text{(nach (67))}}}\\
&= \sum_{z\in X_i} q_{i,k}.
\end{aligned}$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit (65), so erhalten wir $\sum\limits_{z\in X_i} p_{i,z} = \sum\limits_{k=1}^{n} q_{i,k}$. Damit ist (62) bewiesen.]

Nun ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{d} \underbrace{\sum_{z\in X_i} p_{i,z}}_{\substack{=\sum_{k=1}^{n} q_{i,k}\\ \text{(nach (62))}}}\\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{n}}_{=\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{d}} q_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{d} q_{i,k}}_{=q_{1,k}+q_{2,k}+\cdots+q_{d,k}}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(q_{1,k}+q_{2,k}+\cdots+q_{d,k}\right)}_{\substack{\geq d\sqrt[d]{q_{1,k}q_{2,k}\cdots q_{d,k}}\\ \text{(nach Theorem 1.15 } \textbf{(b)}\text{,}\\ \text{angewandt auf } d \text{ und } q_{i,k}\\ \text{statt } n \text{ und } a_i\text{)}}}\\
&\geq \sum_{k=1}^{n} d\sqrt[d]{q_{1,k}q_{2,k}\cdots q_{d,k}} = d\sum_{k=1}^{n} \sqrt[d]{q_{1,k}q_{2,k}\cdots q_{d,k}}.
\end{aligned} \tag{68}$$

Andererseits gilt

$$q_{1,k}q_{2,k}\cdots q_{d,k} \geq a_k \tag{69}$$

für jedes $k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

[*Beweis von (69):* Sei $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ beliebig. Für jedes $i \in \{1,2,\ldots,d\}$ definieren wir eine Menge

$$Q_{i,k} = \{x_i \mid x \in X \text{ und } f(x) = k\}.$$

Für jedes $i \in \{1,2,\ldots,d\}$ gilt also

$$|Q_{i,k}| = |\{x_i \mid x \in X \text{ und } f(x) = k\}| = q_{i,k} \tag{70}$$

(nach (61)).

Doch a_k ist definiert als die Anzahl aller $x \in X$, die $f(x) = k$ erfüllen. Das heißt,

$$a_k = |\{x \in X \mid f(x) = k\}| . \tag{71}$$

Jedoch ist leicht einzusehen, dass

$$\{x \in X \mid f(x) = k\} \subseteq Q_{1,k} \times Q_{2,k} \times \cdots \times Q_{d,k}$$

gilt[12]. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
|\{x \in X \mid f(x) = k\}| &\leq |Q_{1,k} \times Q_{2,k} \times \cdots \times Q_{d,k}| \\
&= |Q_{1,k}| \cdot |Q_{2,k}| \cdot \cdots \cdot |Q_{d,k}| = \prod_{i=1}^{d} \underbrace{|Q_{i,k}|}_{\substack{=q_{i,k} \\ \text{(nach (70))}}} = \prod_{i=1}^{d} q_{i,k} \\
&= q_{1,k} q_{2,k} \cdots q_{d,k}.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$q_{1,k} q_{2,k} \cdots q_{d,k} \geq |\{x \in X \mid f(x) = k\}| = a_k \qquad \text{(nach (71))} .$$

Damit ist (69) bewiesen.]

Nun wird (68) zu

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d} \sum_{z \in X_i} p_{i,z} &\geq d \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sqrt[d]{q_{1,k} q_{2,k} \cdots q_{d,k}}}_{\substack{\geq \sqrt[d]{a_k} \\ \text{(denn (69)} \\ \text{ergibt } q_{1,k} q_{2,k} \cdots q_{d,k} \geq a_k)}} \geq d \sum_{k=1}^{n} \sqrt[d]{a_k} \\
&= d \left(\sqrt[d]{a_1} + \sqrt[d]{a_2} + \cdots + \sqrt[d]{a_n} \right)
\end{aligned} \tag{72}$$

Nun kommen wir zum Finale des Beweises: Wir müssen zeigen, dass es ein $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ und ein $z \in X_i$ gibt mit der Eigenschaft, dass

$$|\{f(x) \mid x \in X \text{ und } x_i = z\}| \geq C$$

[12] *Beweis:* Sei $y \in \{x \in X \mid f(x) = k\}$. Dann ist y ein $x \in X$ mit der Eigenschaft, dass $f(x) = k$ gilt. Das heißt, $y \in X$ und $f(y) = k$. Wegen $y \in X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_d$ ist y ein d-Tupel; es gilt also $y = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$. Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ ist

$$\begin{aligned}
y_i &\in \{x_i \mid x \in X \text{ und } f(x) = k\} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn wir haben } y_i = x_i \text{ für ein } x \in X \text{ mit der Eigenschaft } f(x) = k \\ \text{(nämlich, für } x = y) \end{array} \right) \\
&= Q_{i,k} \qquad \text{(nach der Definition von } Q_{i,k}) .
\end{aligned}$$

Das heißt, $(y_1, y_2, \ldots, y_d) \in Q_{1,k} \times Q_{2,k} \times \cdots \times Q_{d,k}$. Wegen $y = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$ läßt sich dies umschreiben als $y \in Q_{1,k} \times Q_{2,k} \times \cdots \times Q_{d,k}$.

Vergessen wir nun, dass wir y fixiert haben. Wir haben somit gezeigt, dass $y \in Q_{1,k} \times Q_{2,k} \times \cdots \times Q_{d,k}$ für jedes $y \in \{x \in X \mid f(x) = k\}$ gilt. Das heißt, wir haben $\{x \in X \mid f(x) = k\} \subseteq Q_{1,k} \times Q_{2,k} \times \cdots \times Q_{d,k}$.

gilt. Wir beweisen dies durch Widerspruch: Wir nehmen also an, dass es kein solches Paar gibt. Das heißt, für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ und jedes $z \in X_i$ gilt

$$\left|\{f(x) \mid x \in X \text{ und } x_i = z\}\right| < C. \tag{73}$$

Wir haben angenommen, dass die Zahl $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_d|$ (dies ist der Nenner in der Definition von C) von 0 verschieden ist. Also ist mindestens eine der d Mengen $X_1, X_2, \ldots, X_d$ nichtleer. Das heißt, es gibt mindestens ein Paar (i, z) mit $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ und $z \in X_i$.

Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ und jedes $z \in X_i$ ist aber

$$\begin{aligned} p_{i,z} &= \left|\{f(x) \mid x \in X \text{ und } x_i = z\}\right| && \text{(nach der Definition von } p_{i,z}\text{)} \\ &< C && \text{(nach (73))}. \end{aligned} \tag{74}$$

Summieren wir diese Ungleichung über alle $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ und alle $z \in X_i$ auf, so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{z \in X_i} p_{i,z} < \sum_{i=1}^{d} \sum_{z \in X_i} C.$$

(Hierbei haben wir tatsächlich eine strikte Ungleichung erhalten, denn unsere Doppelsumme ist nichtleer[13].) Es gilt also

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{d} \sum_{z \in X_i} p_{i,z} &< \sum_{i=1}^{d} \underbrace{\sum_{z \in X_i} C}_{=|X_i| C} = \sum_{i=1}^{d} |X_i| \, C = \left(|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_d|\right) C \\ &= d \left(\sqrt[d]{a_1} + \sqrt[d]{a_2} + \cdots + \sqrt[d]{a_n}\right) \end{aligned}$$

(denn $C = \dfrac{d\left(\sqrt[d]{a_1} + \sqrt[d]{a_2} + \cdots + \sqrt[d]{a_n}\right)}{|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_d|}$). Dies steht im Widerspruch zu (72). Damit ist der gewünschte Widerspruch erhalten; Satz 4.3 ist also bewiesen. □

Warum ist Satz 4.3 eine Verallgemeinerung von Beispiel 1.12? Um dies einzusehen, betrachten wir ein $n \times n$-Schachbrett, welches (gemäß den Bedingungen von Beispiel 1.12) mit Zahlen gefüllt wurde. Wir setzen $d = 2$ und $X_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $X_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann ist $X = X_1 \times X_2$. Sei nun $f : X \to \{1, 2, \ldots, n\}$ die Abbildung, die jedes Paar $(i, j) \in X_1 \times X_2$ überführt in den Eintrag in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte dieses $n \times n$-Schachbretts. Laut den Bedingungen von Beispiel 1.12 steht jede der n Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in genau n Feldern des $n \times n$-Schachbretts; das heißt, für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

[13] In etwas mehr Detail: Wir haben die Ungleichung (74) über alle Paare (i, z) mit $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ und $z \in X_i$ aufsummiert. Da wir wissen, dass es mindestens ein solches Paar gibt, war dies eine nichtleere Summe. Doch eine nichtleere Summe von strikten Ungleichungen ist immer eine strikte Ungleichung.

gibt es genau n verschiedene $x \in X$, die $f(x) = j$ erfüllen. Die in Satz 4.3 definierten Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind also alle gleich n. Die in Satz 4.3 definierte Zahl C ist damit gleich

$$\begin{aligned} C &= \frac{2\left(\sqrt[2]{n} + \sqrt[2]{n} + \cdots + \sqrt[2]{n}\right)}{n+n} \qquad \text{(wobei im Zähler genau } n \text{ Wurzeln stehen)} \\ &= \frac{2n\sqrt[2]{n}}{n+n} = \sqrt[2]{n} = \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Satz 4.3 behauptet also, dass es ein $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ und ein $z \in X_i$ gibt mit der Eigenschaft, dass

$$|\{f(x) \mid x \in X \text{ und } x_i = z\}| \geq \sqrt{n}$$

gilt. Das heißt, es gibt mindestens eine Zeile oder Spalte des Schachbretts, die mindestens $\sqrt{n}$ verschiedene Zahlen enthält (und zwar ist es die z-te Zeile, wenn $i = 1$ ist, und es ist die z-te Spalte, wenn $i = 2$ ist). Daher folgt Beispiel 1.12 aus Satz 4.3. Wir haben mit Satz 4.3 also tatsächlich Beispiel 1.12 verallgemeinert. □

4.1.10. zu Aufgabe 10

Lösung zu Aufgabe 10. Satz 1.13 **(b)** (angewandt auf $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ statt a, b, c) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3\sqrt[3]{1} \qquad \left(\text{denn } \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1\right) \\ &= 3. \end{aligned}$$

Damit ist Aufgabe 10 gelöst. □

Es sei angemerkt, dass sich Aufgabe 10 leicht auf n positive reelle Zahlen verallgemeinern läßt. (Für die Lösung braucht man dann natürlich Satz 1.15 **(b)**.)

4.1.11. zu Aufgabe 11

Lösung zu Aufgabe 11. Satz 1.13 **(b)** (angewandt auf ab^2, bc^2, ca^2 statt a, b, c) ergibt

$$\begin{aligned} ab^2 + bc^2 + ca^2 &\geq 3\sqrt[3]{ab^2 \cdot bc^2 \cdot ca^2} \\ &= 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} \qquad \left(\text{denn } ab^2 \cdot bc^2 \cdot ca^2 = a^3b^3c^3\right) \\ &= 3abc. \end{aligned} \tag{75}$$

Satz 1.13 **(b)** (angewandt auf a^2b, b^2c, c^2a statt a, b, c) ergibt

$$\begin{aligned} a^2b + b^2c + c^2a &\geq 3\sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} \\ &= 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} \qquad \left(\text{denn } a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a = a^3b^3c^3\right) \\ &= 3abc. \end{aligned} \tag{76}$$

Nun sieht man aber durch blinde Nachrechnung, dass

$$\begin{aligned} &\frac{2}{9}(a+b+c)^3 - (ab(b+c) + bc(c+a) + ca(a+b)) \\ &= \frac{2}{9}\left(b \underbrace{(a-b)^2}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(nach Satz 1.1)}}} + c \underbrace{(b-c)^2}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(nach Satz 1.1)}}} + a \underbrace{(c-a)^2}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(nach Satz 1.1)}}}\right) \\ &\qquad + \frac{4}{9}\underbrace{\left(a^2b + b^2c + c^2a - 3abc\right)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(nach (76))}}} + \frac{1}{9}\underbrace{\left(ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc\right)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(nach (75))}}} \\ &\geq \frac{2}{9}(b \cdot 0 + c \cdot 0 + a \cdot 0) + \frac{4}{9} \cdot 0 + \frac{1}{9} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

gilt. Also ist

$$ab(b+c) + bc(c+a) + ca(a+b) \leq \frac{2}{9}(a+b+c)^3.$$

Damit ist Aufgabe 11 gelöst. □

4.1.12. zu Aufgabe 12

Lösung zu Aufgabe 12. Wir haben

$$a+b+c+d+e+f = (a+d) + (b+e) + (c+f) \geq 3\sqrt[3]{(a+d)(b+e)(c+f)}$$

(nach Satz 1.13 **(b)**, angewandt auf $a+d, b+e, c+f$ statt a, b, c). Nehmen wir beide Seiten dieser Ungleichung in die 3-te Potenz, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &(a+b+c+d+e+f)^3 \\ &\geq \left(3\sqrt[3]{(a+d)(b+e)(c+f)}\right)^3 = 27 \underbrace{(a+d)(b+e)(c+f)}_{=abc+bcd+cde+def+efa+fab+ace+bdf} \\ &= 27\left(abc + bcd + cde + def + efa + fab + \underbrace{ace}_{\geq 0} + \underbrace{bdf}_{\geq 0}\right) \\ &\geq 27(abc + bcd + cde + def + efa + fab). \end{aligned}$$

Dividieren wir diese Ungleichung durch 27, so erhalten wir

$$\frac{1}{27}(a+b+c+d+e+f)^3 \geq abc+bcd+cde+def+efa+fab.$$

Damit ist Aufgabe 12 gelöst. □

4.1.13. zu Aufgabe 13

Lösung zu Aufgabe 13. Dies ist ähnlich zu unserer obigen Lösung zu Aufgabe 5, aber einfacher, da die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sowie $b_1, b_2, \ldots, b_n$ nunmehr als nichtnegativ vorausgesetzt werden.

Beweis von Satz 1.20. Wir definieren zwei nichtnegative reelle Zahlen

$$A = \sqrt[p]{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p} \qquad \text{und} \qquad B = \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q}.$$

Nach der Definition von A gilt

$$A^p = a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p = \sum_{i=1}^{n} a_i^p. \tag{77}$$

Nach der Definition von B gilt

$$B^q = b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q = \sum_{i=1}^{n} b_i^q. \tag{78}$$

Wir müssen zeigen, dass

$$\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p} \cdot \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q} \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

gilt. Wegen $A = \sqrt[p]{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}$ und $B = \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q}$ können wir dies folgendermaßen umformulieren: Wir müssen zeigen, dass

$$AB \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \tag{79}$$

gilt. Wenn alle n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gleich 0 sind, dann ist (79) leicht zu beweisen[14]. Wir nehmen also o. B. d. A. an, dass nicht alle n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gleich 0 sind. Mit derselben Begründung nehmen wir o. B. d. A. an, dass nicht alle n Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ gleich 0 sind.

[14] *Beweis:* Wir nehmen an, dass alle n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gleich 0 sind. Nun ist

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[p]{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p} \\ &= \sqrt[p]{0^p + 0^p + \cdots + 0^p} && \text{(denn alle } n \text{ Zahlen } a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ sind gleich 0)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

Die Zahlen A und B sind positiv[15]. Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt also

$$\frac{(a_i/A)^p}{p} + \frac{(b_i/B)^q}{q} \geq (a_i/A)\,(b_i/B)\,.$$

(nach Satz 1.18, angewandt auf $a = a_i/A$ und $b = b_i/B$). Summieren wir diese Ungleichung über alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ auf, so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(a_i/A)^p}{p} + \frac{(b_i/B)^q}{q} \right) \geq \sum_{i=1}^{n} (a_i/A)\,(b_i/B)\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(a_i/A)^p}{p} + \frac{(b_i/B)^q}{q} \right) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i/A)^p}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(b_i/B)^q}{q} \\
&= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(a_i/A)^p}_{=a_i^p/A^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(b_i/B)^q}_{=b_i^q/B^q} \\
&= \frac{1}{p} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i^p/A^p}_{\substack{=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)/A^p=1 \\ \text{(nach (77))}}} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i^q/B^q}_{\substack{=\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)/B^q=1 \\ \text{(nach (78))}}} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i/A)\,(b_i/B) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right) / (AB)$$

---

also $AB = 0B = 0$. Ferner ist

$$\begin{aligned}
&a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\
&= 0 b_1 + 0 b_2 + \cdots + 0 b_n \qquad \text{(denn alle } n \text{ Zahlen } a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ sind gleich 0)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Somit sind beide Seiten der Ungleichung (79) gleich 0. Die Ungleichung (79) ist damit erfüllt (denn $0 \geq 0$).

[15] *Beweis:* Die n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind nichtnegativ, und mindestens eine von ihnen ist positiv (denn nicht alle n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind gleich 0; aber sie sind alle nichtnegativ). Somit gilt das gleiche für ihre p-ten Potenzen. Das heißt, die n Zahlen $a_1^p, a_2^p, \ldots, a_n^p$ sind nichtnegativ, und mindestens eine von ihnen ist positiv. Daher ist die Summe $a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p$ dieser n Zahlen positiv. Also ist auch die p-te Wurzel $\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}$ dieser Summe positiv. Mit anderen Worten: A ist positiv (denn $A = \sqrt[p]{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}$). Ein analoges Argument zeigt, dass B positiv ist.

läßt sich dies umschreiben als

$$1 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right) / (AB) .$$

Da AB positiv ist (denn A und B sind positiv), können wir diese Ungleichung mit AB multiplizieren; dadurch erhalten wir

$$AB \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Damit ist (79) bewiesen. Wie schon gesagt, ist damit Satz 1.20 bewiesen. □

Aufgabe 13 ist damit gelöst. □

Literatur

[AleKur91] P. Alekseev, L. Kurlyandchik, *Summa minimumov i minimum summy*, Kvant 1991/3, pp. 49–55.
`http://kvant.mccme.ru/1991/03/summa_minimumov_i_minimum_summ.htm`

[AndDos10] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Problems from the Book*, 2nd edition, XYZ Press 2010.

[AndDos12] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Straight from the Book*, XYZ Press 2012.

[Bosch20] Siegfried Bosch, *Algebra*, 9te Auflage, Springer 2020.

[Brande05] Martin Brandenburg (Martin_Infinite), *Symmetrische Polynome*, 14.2.2005, Matheplanet.
`https://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=738`

[Chen20] Evan Chen, *various notes and problem collections on mathematical olympiads*, `https://web.evanchen.cc/` .

[Cirtoa06] Vasile Cirtoaje, *Algebraic inequalities: old and new methods*, Gil, Zalău 2006.

[Conlon11] David Conlon, *Extremal graph theory*, 2011.
`https://www.its.caltech.edu/~dconlon/Extremal-course.html`

[DJMP11] Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic, Nikola Petrovic, *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959-2009*, 2nd edition, Springer 2011. See `https://www.imomath.com/index.php?options=350&lmm=0` for errata.

[Edward05] Harold M. Edwards, *Essays in Constructive Mathematics*, Springer 2005.

[Geissi05] Christoph Geißinger, *Artikel 10: Ungleichungen*, in: Richard Bamler, Christian Reiher et al., *Ein-Blick in die Mathematik*, Aulis Verlag Deubner, Köln 2005.

[GelAnd17] Răzvan Gelca, Titu Andreescu, *Putnam and Beyond*, 2nd edition, Springer 2017.

[Grinbe07] Darij Grinberg, *The Vornicu-Schur inequality and its variations*, 13 August 2007.
`http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/VornicuS.pdf`

[Hung07] Pham Kim Hung, *Secrets in Inequalities, volume 1*, GIL 2007.

[Jainta02] Paul Jainta, $\sqrt{\textit{WURZEL}}$*-Werkstatt Mathematik: Polynome – Teil V: Elementarsymmetrische Polynome*, WURZEL ca. 2002.
`http://www.wurzel.org/werkstatt/polynome5.pdf`

[Kerber04] Adalbert Kerber, *Lineare Algebra, WS 2002/2003*, 4. Oktober 2004.
`http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/lina02/alles.pdf`

[Khrabr03] Alexander I. Khrabrov, *I snova neravenstvo Cauchy–Bunyakovskogo (Cauchy–Bunyakovsky inequality)* (Russian), Appendix to: St Petersburg mathematical olympiad, 2003. Nevsky Dialekt, St Petersburg, 2003, pp. 118–152.
`http://www.aikhrabrov.narod.ru/papers/cbs.zip`

[Lee07] Hojoo Lee, *Topics in Inequalities: Theorems and Techniques*, 8 August 2007.
`https://www.isinj.com/mt-usamo/TopicsinInequalities1stedition-HojooLee(2007`
`.pdf`

[Lehn15] Manfred Lehn, *Vorlesungen über Algebra: Wintersemester 2015*, 10. Dezember 2015.
`https://download.uni-mainz.de/mathematik/TopologieundGeometrie/Lehre/WS15-16/Algebra1/Vorlesungstext.pdf`

[LeLoPo08] Hojoo Lee, Tom Lovering, and Cosmin Pohoata, *Infinity*, 19 October 2008.
`http://prac.im.pwr.wroc.pl/~kwasnicki/pl/o/infinity.pdf`

[Lin12] Minghua Lin, *The AM-GM Inequality and CBS Inequality Are Equivalent*, The Mathematical Intelligencer **34** (2012), p. 6.

[Mildor06] Thomas J. Mildorf, *Olympiad Inequalities*, 4 August 2006.
`https://www.isinj.com/mt-usamo/OlympiadInequalities-ThomasMildorf(2006)`
`.pdf`

[Rollin16] Jonathan Rollin, *KIT Summer Term 2016, Extremal graph theory: Solutions to problem sheet 1*, 2016.
`https://www.math.kit.edu/iag6/lehre/extremalgt2016s/media/01-solution.pdf`
Teil von einem Kurs von Maria Axenovich; siehe `https://www.math.kit.edu/iag6/lehre/extremalgt2016s` für den gesamten Kurs.

[ShChYa62] David Oskarovich Shklarsky, Nikolai Nikolaevich Chentzov, Isaak Moiseevich Yaglom, *The USSR Olympiad Problem Book*, Freeman 1962 (reprinted by Dover 1993).

[SpQuBa20] Eckard Specht, Erhard Quaisser, Patrick Bauermann, *50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik: Die schönsten Aufgaben*, 2te Auflage, Springer 2020.

[Steele04] J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Cambridge University Press 2004.
Siehe `http://www-stat.wharton.upenn.edu/~steele/Publications/Books/CSMC/CSMC_Errata.pdf` für Errata.

[Swanso20] Irene Swanson, *Introduction with Analysis with Complex Numbers*, 2020.
`https://web.archive.org/web/20201012174324/https://people.reed.edu/~iswanson/analysisconstructR.pdf`

[YagYag64] Akiva M. Yaglom, Isaac M. Yaglom, *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions, volume I: Combinatorial Analysis and Probability Theory*, Holden-Day 1964 (reprinted by Dover 1987).

[YagYag67] Akiva M. Yaglom, Isaac M. Yaglom, *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions, volume II: Problems from Various Branches of Mathematics*, Holden-Day 1967 (reprinted by Dover 1987).

[ZawHit09] Alexander Zawaira, Gavin Hitchcock, *A Primer for Mathematics Competitions*, Oxford University Press 2009.

[Zeitz17] Paul Zeitz, *The Art and Craft of Problem Solving*, 3rd edition, Wiley 2017.

[Zhao20] Yufei Zhao, *Math Olympiad training handouts*, `https://yufeizhao.com/olympiad/` .